

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 5 日現在

機関番号：15501

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2011～2014

課題番号：23540092

研究課題名(和文) マグネティックグラフ多項式から探る結び目の幾何構造

研究課題名(英文) A magnetic graph polynomial invariant and the geometric structure of knots

研究代表者

宮澤 康行 (Miyazawa, Yasuyuki)

山口大学・理工学研究科・教授

研究者番号：60263761

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,700,000円

研究成果の概要(和文)：研究の目的は結び目・絡み目の幾何学的構造と多項式不変量との関係を調査することである。この研究では、特に、結び目・絡み目のHOMFLY多項式と呼ばれる多項式不変量に注目し、多項式不変量の特徴付けと実現問題を考察した。多項式不変量とは、結び目・絡み目を区別するために利用される非常に役に立つ道具である。結果の一つとして、ある条件を満たす結び目・絡み目に対し、そのHOMFLY多項式が別の多項式不変量であるJones多項式の情報だけで決定されることを見出した。

研究成果の概要(英文)：Some relationships between the geometric structure and polynomial invariants of knots and links are studied. The characterization and the realization problems for the invariant for knots and links named the HOMFLY polynomial are mainly considered. Here, polynomial invariants for knots and links are tools which are very useful for detecting differences between knots or links. As a result, it is revealed that the HOMFLY polynomials for links with some conditions are determined only by the Jones polynomial which has different topology from the HOMFLY polynomial.

研究分野：結び目理論

キーワード：多項式不変量

1. 研究開始当初の背景

結び目理論の主要研究目標は結び目の分類である。結び目の分類問題を考える場合、有用かつ重要なものとして不変量があげられる。単刀直入に言えば、不変量は研究のための単なる道具にすぎない。しかしながら、Alexander 多項式や Jones 多項式を考えてみれば分かることであるが、それらが結び目理論の発展に寄与した功績は計り知れないものがある。

結び目を拡張した概念に空間グラフがある。研究対象が結び目であっても、空間グラフに考察の対象を広げることで、結び目だけに制限していたときには不明であった結び目の特徴や性質等に言及できることが多々ある。

このような背景のもと、申請者はこの数年間、より大局的な見地から問題を考察するという指針に従って、結び目理論の研究を行ってきた。その一つが、マグネティックグラフと呼ばれる空間グラフを経由する結び目の多項式不変量を用いた結び目の分類問題へのアプローチである。この方法により、これまでにいくつかの成果をあげることが出来たが、さらに推し進めることで、より発展的な結果が得られることが期待できる。

2. 研究の目的

本研究の目的は、結び目を拡張した概念であるマグネティックグラフを経由して定義される結び目の多項式不変量(マグネティックグラフ多項式)を通して、結び目理論の主要研究目標である結び目の同値判定・分類問題を調査・探求することである。

特に、その多項式が有する代数的性質・特徴と結び目の幾何構造との関係解明に焦点を当て、結び目の同値性判定に対しその不変量を用いることの有用性と判定に際しての障害について理論的な説明、あるいは解釈を与えることを目指す。

3. 研究の方法

研究目的を達成するため、論理的(数学的)側面からのアプローチを軸とし、計算機的(実験的)側面からのアプローチを補助的に、それぞれの手法を独立して実施するとともに、研究の進行状況に応じて適宜うまく組み合わせながら研究課題の解決を図る。

論理的(数学的)側面からの計画を実施するための具体的な方法は次のようなものである。まず、既存の多項式不変量について知られている事実を文献などをもとに、探索・収集する。次にそれら収集した情報をもとに、調査対象の多項式に類似性を見出せるかの分析を行う。分析の結果、類似性の存在が予想される場合には、いくつか具体例を計算し、その結果を基に仮説を立てる。立てた仮説が正しいかどうか証明のためのアイデアを立案し、論証する。その後、立証された事象の特徴を調べ、具体的にどの程度有用であるか確認する。得られた研究成果を国内外の研究集会・セミナー等で報告するとともに、論文

を作成して専門雑誌に投稿・発表する。以上を基本サイクルとして研究を進める。

上記計画を行うにしても、実際に多項式を計算する必要がある。しかしながら、数多くの多項式を人力で計算するには限界がある。そこで、計算プログラムの開発を行い、研究の飛躍的進展を後押しすることを目指す。コンピュータでの計算が可能になれば、予想立証のための実験が行えたり、逆に数多くの計算結果を観察することで仮説を立てることが容易になるという利点がある。開発したプログラムを公開すれば、他の結び目理論の研究者にとっても有用であり、それぞれの研究の活性化、ひいては結び目理論の発展に繋がるものと推察される。

また、研究環境を整備し研究に支障が出ないよう配慮するとともに、各種学会、研究会への参加やセミナーの主催、あるいは研究打合わせを積極的に行い、他研究者との交流、意見交換を通して研究に有益な情報等を可能な限り入手し、研究の進展に役立てる。研究結果・成果は学会等での発表を行うとともに、論文を作成、web などを通じて広く公表し、社会への還元を行う。

4. 研究成果

(1) 論文「Gordian distance and polynomial invariants」では、公差交換という結び目の正則表示に対する局所的な変形を用いて、結び目同士の間導入された距離に関し、HOMFLY 多項式、Jones 多項式、 Q 多項式という良く知られた3つの結び目の多項式不変量を利用した評価式を与えた。さらに、その評価式に基づいて数多くの結び目の組の間の距離を具体的に決定した。この結果は、距離が導入された結び目集合の作る空間の幾何構造の解明につながる重要な役割を果たすものであり、それゆえ大いに意義のあるものである。

(2) 論文「A distance for diagram of a knot」では、任意の結び目の正則表示の集合に対し、Reidemeister move と呼ばれる結び目の型を変えない局所変形を用いて、正則表示の間に距離を導入、その性質を調べることによって、正則表示が形成する空間の構造に言及した。さらに、その構造を利用して結び目の新しい不変量(ホモロジー群)を定義、それを考察することで不変量についていくつかの特徴を見出した。

(3) 発表「The structure of the HOMFLY polynomial of a knot」と発表「The HOMFLY polynomial and admissible values」は、いずれも結び目の HOMFLY 多項式の実現問題に関するもので、HOMFLY 多項式の構造を精査し、変数の次数に着目することで、実現問題についていくつかの事実を突き止めるとともに、実際に具体的に許容される多項式の値を少なからず決定した。上記発表のうち発表「The HOMFLY polynomial and admissible values」は国際会議における招待講演である。

(4) 論文「A fake HOMFLY polynomial of a

knot」では、結び目の HOMFLY 多項式に対し、類似の概念を導入、定式化し、その類似性について与えられた結び目の HOMFLY 多項式と類似した多項式を HOMFLY 多項式として持つ結び目の実現問題を考察し、具体的に条件を満たす結び目を構成することで問題の解決を果たした。

(5) 発表「Knots with v -span 4 and their HOMFLY polynomials」、発表「On admissible HOMFLY polynomials for knots」、発表「HOMFLY polynomials for 3-component links with braid index 3」はいずれも国内で開催された会議における講演であり、うち最後の発表は招待講演である。発表内容はいずれも絡み目の HOMFLY 多項式の構造に関するものである。絡み目の HOMFLY 多項式がその絡み目の Jones 多項式によってどの程度制限を受ける、あるいは決定されるかという問題に対し、HOMFLY 多項式の変数の次数に条件を加えた場合について考察し、得られた結果について報告を行ったものである。

具体的には、発表「Knots with v -span 4 and their HOMFLY polynomials」では、成分数が 1、即ち、結び目の HOMFLY 多項式を研究対象とし、ある 1 つの場合を除いては Jones 多項式が HOMFLY 多項式を決定することを示した。除外したケースの可否については未だ結論を得るまでには至っていない。

また、発表「On admissible HOMFLY polynomials for knots」はこの研究に関連する話題について言及したものである。

さらに、発表「HOMFLY polynomials for 3-component links with braid index 3」では、3 成分の絡み目について上記最初の発表と同様の研究を行い、すべての対象となる絡み目について HOMFLY 多項式が Jones 多項式によって完全に決定されることを突き止めた。

(6) 論文「HOMFLY polynomials for 3-component links with v -span 4」では、発表「HOMFLY polynomials for 3-component links with braid index 3」の研究を進展させ、3 成分の絡み目について、HOMFLY 多項式のある変数の次数の差が 4 の場合、HOMFLY 多項式が Jones 多項式によって完全に決定されることを示した。

(7) 発表「Two component links with v -span 4 and their HOMFLY polynomials」は、2 成分の絡み目に対し、論文「HOMFLY polynomials for 3-component links with v -span 4」と同様の研究を行って得られた結果を発表したものである。この場合には、HOMFLY 多項式は Jones 多項式だけでは決定できない例が示され、もう一つ不変量が必要になることが述べられた。

(8) 発表「結び目の Jones 多項式の因数について」は、題目通り結び目の Jones 多項式の因数について考察した結果を報告したもので、「素」と呼ばれる結び目の特徴を有しているにも関わらず、その Jones 多項式が合

成結び目の多項式、即ち、別の 2 つの結び目の Jones 多項式の積として表されるという性質を持つ結び目が無数に存在することが、具体的に結び目を構成することで示された。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 4 件)

Yasuyuki Miyazawa, HOMFLY polynomials for 3-component links with v -span 4, *Topology and Its Applications*, 査読有, 2015, 印刷中.

DOI: 10.1016/j.topol.2015.05.040

Yasuyuki Miyazawa, A fake HOMFLY polynomial of a knot, *Osaka Journal of Mathematics*, 査読有, Vol.50, 2013, 1073-1096.

Yasuyuki Miyazawa, A distance for diagrams of a knot, *Topology and Its Applications*, 査読有, Vol.159, 2012, 1122-1131.

DOI: 10.1016/j.topol.2011.11.019

Yasuyuki Miyazawa, Gordian distance and polynomial invariants, *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, 査読有, Vol.20, 2011, 895-907.

DOI: 10.1142/S0218216511009054

[学会発表](計 10 件)

Yasuyuki Miyazawa, HOMFLY polynomials for links with v -span 4, *Knots and Low Dimensional Manifolds*, 2014 年 8 月 26 日, Busan (Korea).

Yasuyuki Miyazawa, On polynomials for virtual links or graphs, *International Symposium on Graph Polynomials and their Applications*, 2014 年 6 月 28 日, Xiamen (China).

宮澤 康行, Two component links with v -span 4 and their HOMFLY polynomials, 東北結び目セミナー, 2013 年 10 月 25 日, 東北大学(宮城県仙台市).

宮澤 康行, 結び目の Jones 多項式の因数について, 2013 琉球結び目セミナー, 2013 年 9 月 12 日, てんぶす那覇(沖縄県那覇市)

Yasuyuki Miyazawa, HOMFLY polynomials for 3-component links with v -span 4, *International Conference on Topology and Geometry 2013 Joint with the Sixth Japan-Mexico Topology Symposium*, 2013 年 9 月 5 日, 島根大学(島根県松江市).

Yasuyuki Miyazawa, HOMFLY polynomials for 3-component links with braid index 3, *E-KOOK セミナー*, 2013 年 2 月 15 日, 大阪市立大学(大阪府大阪市).

宮澤 康行, Knots with v -span 4 and their HOMFLY polynomials, 東北結び目セミナー, 2012 年 10 月 14 日, 山形大学(山形県山形市).

宮澤 康行, On admissible HOMFLY

polynomials for Knots, 2012 琉球結び
目セミナー, 2012年9月3日, てんぶす
那覇(沖縄県那覇市).

Yasuyuki Miyazawa, The HOMFLY
polynomial and admissible values, The
8th East Asian School of Knots and
Related Topics, 2012年1月11日,
Daejeon (Korea).

宮澤 康行, The structure of the
HOMFLY polynomial of a knot, 東北結び
目セミナー2011, 2011年10月15日, 東
北大学(宮城県仙台市).

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況(計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

取得状況(計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等
該当なし

6. 研究組織

(1) 研究代表者

宮澤 康行(Miyazawa, Yasuyuki)
山口大学・大学院理工学研究科・教授
研究者番号：60263761

(2) 研究分担者

該当なし

(3) 連携研究者

該当なし