

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 15 日現在

機関番号：17104

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2011～2014

課題番号：23540096

研究課題名(和文) シンプレクティックトポロジー的手法と代数幾何的手法による4次元多様体の研究

研究課題名(英文) A study of 4-dimensional manifolds from the symplectic-topological viewpoint and the algebraic-geometrical viewpoint

研究代表者

佐藤 好久 (Sato, Yoshihisa)

九州工業大学・大学院情報工学研究院・教授

研究者番号：90231349

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,900,000円

研究成果の概要(和文)：シンプレクティック4次元多様体のクラスは、ケーラー曲面、すなわち、複素射影曲面を含み、これらは複素代数幾何学における重要な研究対象でもある。複素代数幾何学においては、チャーン数の組や代数曲線束のスロープなどの特徴付けを行う研究(複素曲面の地誌学)により複素曲面の分類問題が研究されている。一方、シンプレクティック4次元多様体はレフシェッツ束空間といったファイブレーション構造を持っている。本研究により、このファイブレーション構造を通じて、シンプレクティック4次元多様体の地誌学問題の解を得ることができ、また、非極小レフシェッツ束の標準類を決定しそれらの小平次元を計算することができた。

研究成果の概要(英文)：Symplectic 4-manifolds are important objects in smooth 4-manifolds. A class of symplectic 4-manifolds includes Kähler surfaces or complex projective surfaces, which are important objects in algebraic geometry. In algebraic geometry, in order to classify complex surfaces, one studies the characterization of pairs of Chern numbers or the slopes of pencils of algebraic curve, whose problem is called the geography problem. Furthermore, symplectic 4-manifolds admit fibration structures as Lefschetz fibrations/pencils.

We study symplectic 4-manifolds from the symplectic-topological viewpoint and the algebraic-geometrical viewpoint and can obtain the answer of the geography problem for symplectic 4-manifolds. Furthermore, we can determine the canonical classes of nonminimal Lefschetz fibrations, and then we calculate the Kodaira dimension of those fibrations.

研究分野：4次元微分位相幾何学，シンプレクティックトポロジー，複素代数曲面論

キーワード：Lefschetz fibration Lefschetz pencil symplectic topology geography pseudoholomorphic curve Gromov invariant Kodaira dimension

1. 研究開始当初の背景

4次元多様体には、その位相構造に加えて、微分構造、シンプレクティック構造、概複素構造、複素構造などを許容させることができ、許容している構造に応じて、微分トポロジー、シンプレクティックトポロジー、複素代数幾何学として4次元多様体を研究することができる。これらの構造の間の関係は図1のようにになっている。

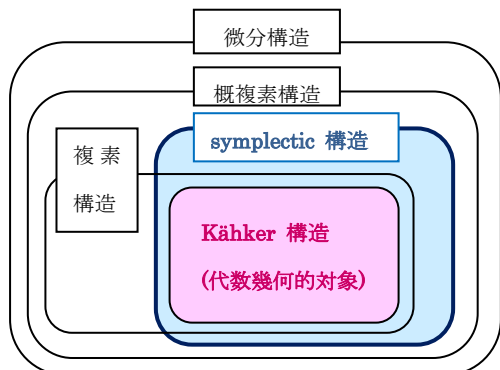


図1: 4次元多様体上の構造の相関

1980年代の4次元微分トポロジーは Donaldson 等によるゲージ理論を用いて微分構造を解明することが主たる研究テーマの1つであった。1990年頃になると、Donaldson のゲージ理論からSeiberg-Witten 理論へと移る。その後、既にGromov によって提唱されていた擬正則曲線論とSeiberg-Witten 理論が相俟って、4次元シンプレクティック多様体の研究が1995年頃から大きく展開されるようになった。図1からわかるように、4次元シンプレクティック多様体の中の重要かつ代表的なクラスとしてKähler 曲面のクラスがあり、複素代数曲面として複素代数幾何の立場からも研究することができる。すなわち、Kähler 曲面は4次元シンプレクティック多様体の代数幾何的研究の対象のモデルである。

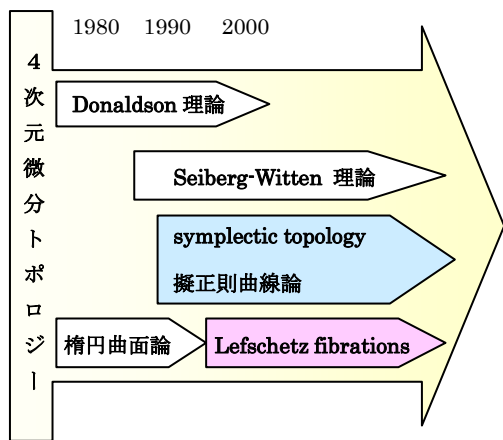


図2: 近年の4次元多様体論の研究の流れ

一方、1996年に松本幸夫氏のLefschetz 束空間 (ファイバーの種数が2以上のLefschetz

fibration をもつ4次元多様体) の研究により Lefschetz 束空間の研究の重要性が再認識されて以来、Donaldson とGompf の著名な研究結果「任意の4次元シンプレクティック多様体はLefschetz pencil の構造をもつ。また、任意のLefschetz 束空間はシンプレクティック構造をもつ」により、4次元微分トポロジーにおいて、Lefschetz 束空間とシンプレクティックトポロジーが盛んに研究されるようになった。

しかしながら、研究開始当初のころは、代数幾何的観点でのシンプレクティック4次元多様体の研究や Lefschetz 束空間のシンプレクティックトポロジー的観点での研究は、初期的・創成的段階であった。この時点での代表的な研究としては論文[1], [2], [3], [4]などが挙げられる。

<引用文献>

[1] Sato, Y. : 2-Spheres of square -1 and the geography of genus-2 Lefschetz fibrations, J. Math. Sci. Univ. Tokyo **15** (2008), 461-491
 [2] Smith, I. : Lefschetz pencils and divisors in moduli space, Geometry and Topology **5** (2001), 579-608
 [3] Stipsicz, A. I. : Chern numbers of certain Lefschetz fibrations, Proc. Amer. Math. Soc. **128** (1999), 1845-1851; Erratum, **128** (2000), 2833-2834
 [4] Stipsicz, A. I. : On the number of vanishing cycles in Lefschetz fibrations, Math. Research Letters **6** (1999), 449-456

2. 研究の目的

4次元シンプレクティック多様体を Lefschetz 型特異点をもつファイブレーション構造を許容する Lefschetz 束空間と考えて、そのファイブレーション構造を通して、複素代数幾何的観点とシンプレクティックトポロジー的観点から4次元シンプレクティック多様体を理解し、複素代数曲面における幾何的現象を4次元シンプレクティック多様体上へと拡張することを目指す。

4次元多様体の基本的な構成方法の1つに「連結和」という操作があり、代数幾何学における重要な操作の1つである「ブローアップ/ダウン」は自己交差数が -1 の球面に対応する \overline{CP}^2 を連結和することにより得られ、代数曲面の代数的構造を不変にする変換である。この理由のために、通常微分トポロジーや複素代数曲面論などでは、「極小」(自己交差数が -1 の球面を含まないこと)である多様体に限定して研究される。一方、ファイブレーション構造に留意した場合、基本的な構成方法として、「ファイバー和」という操作がある。非極小な Lefschetz 束空間は非自明なファイバー和へ分解することのできない(論文[6], [7])、すなわち、この意味で、ファイバー和分解に関して最も原子的な既約的ブロックであると考えられる。

以上のような状況を踏まえて、本研究における具体的な研究テーマを次の2つに絞ることとした。

研究目的1：非極小 Lefschetz 束空間の「地誌学」を調べる。

研究目的2：Lefschetz 束空間に「小平次元」の概念を導入し、「小平次元」を軸とする分類を考察する。

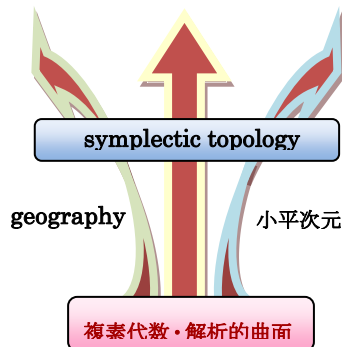


図3：研究の目的

(1) 研究目的1：複素代数曲面論における「地誌学」問題は、一般に、

- ① 複素曲面の Chern 数の組 (c_1^2, c_2) の格子平面 $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ における分布状況を調べる分類
- ② 1つの格子点 (m, n) に対して、 $m=c_1^2(S)$, $n=c_2(S)$ となる複素曲面がどれくらい存在するかを調べる問題

の2つからなる。これらの問題をファイブレーション構造をもつ Lefschetz 束空間に適用して考察する場合、そのファイブレーション $f: X \rightarrow \mathcal{S}$ の特異ファイバーの本数の組 $(n; s_1, s_2, \dots, s_{[g/2]})$ の分布状況を調べることに相当する。ここで、 n は既約特異ファイバーの本数を表し、各 s_h は \mathbb{I}_h 型の可約特異ファイバーの本数を表す。この特異ファイバーの本数の組に関して、地誌学問題①、②を研究する。また、地誌学問題①については、ファイブレーションのスロープという観点からも研究する。スロープの地誌学は、複素代数曲面論において研究されている代数曲線束のスロープの分布状況を Lefschetz ファイブレーションへと適用したものである。

(2) 研究目的2：複素曲面 S の重要な量として、「小平次元」 $\kappa(S)$ 、「飯高-小平次元」 $\kappa(S, D)$ がある。既に、4次元シンプレクティック多様体に対して、シンプレクティック小平次元 κ^s が定義されているが(論文[5])、それはシンプレクティック構造とそれと整合的な複素構造をもつ Kähler 曲面における小平次元の定義を、複素曲面の Enriques - 小平分類定理とシンプレクティック構造との関係をモデルとして定義されたものであり、シンプレクティック構造そのものから純粋に定義されたものではない。すなわち、そのシンプレクティック多様体に対して定義された小平次元は Kähler 曲面を一般化したものと

いう観点に立って定義されたもので、Kähler 曲面の小平次元の状況を拡張する形で定義されている。Kähler 曲面はシンプレクティック多様体の中の特別なものという観点に立ち、その定義を特別な状況で書き換えたときに代数幾何的な小平次元の定義が導かれるようなシンプレクティック小平次元の再定義の方法を考察し、また、Lefschetz 束空間のファイブレーション構造に反映するような小平次元を提唱することを目的とする。

<引用文献>

[5] T.-J. Li: Symplectic 4-manifolds with Kodaira dimension zero, *J. Differential Geom.* **74** (2006), 321-352

[6] Smith, I.: *Geometric monodromy and the hyperbolic disc*, *Quart. J. Math.*, **52** (2001), 217-228

[7] Stipsicz, A. I.: *Indecomposability of certain Lefschetz fibrations*, *Proc. Amer. Math. Soc.* **129** (2000), 1499-1502

3. 研究の方法

研究目的1：非極小な Lefschetz 束空間の地誌学の研究

複素曲面論における地誌学の研究は Chern 数の組 (c_1^2, c_2) を使って格子平面 $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ 上に「地図作り」をすることであった。また、Lefschetz 束空間における地誌学として、異なる型の特異ファイバーの本数の組 $(n, s_1, s_2, \dots, s_{[g/2]})$ を使って高次元格子空間内に「地図作り」をすることを提案した。この研究に対する取り組み方は、

- ① 住んでいると思われる場所 $(n; s_1, s_2, \dots, s_{[g/2]})$ の範囲を絞りこむこと (geography 問題)
- ② 実際に住んでいる住人 (Lefschetz 束空間) が何人いるかを確かめること (botany 問題)

をもって行われる。

① 「住んでいる場所」の絞込み：地誌学の研究では、標準類 K_X が重要な鍵となる。研究代表者のこれまでの研究により、ファイバーの種数が2である、自己交差数-1の球面をもつ非極小な Lefschetz 束空間について、擬正則曲線論を利用することにより、その標準類を決定し、Smith の種数2の Lefschetz pencils の地誌学の有限性定理を一般化・拡張した有限性定理を得ている。先ず、当該研究では、この地誌学の有限性定理が、より大きなファイバー種数の非極小 Lefschetz 束空間にたいしても成立するかどうかを検証する。そのために、そのような Lefschetz 束空間の標準類を決定することから始める。その方法として、非極小な Lefschetz 束空間の極小モデルの標準類に対応するコホモロジー類を擬正則曲線で実現し、その擬正則曲線の解析を行うことによ

って標準類を決定する．標準類が決定されれば，超楕円的な Lefschetz 束空間の地誌学は完全にわかるようになる．非超楕円的な場合に対しては，Smith の符号数公式や足利氏の局所符号数の研究，および，安定曲線のモデュライ空間を上手く用いることにより，地誌学の決定に努める．

②「住人探し」：Lefschetz 束空間の構成方法として，

- ・複素射影曲面を Lefschetz pencil としてとらえ，そのブローアップにより構成する，
- ・Hirzebruch 曲面等の球面上の曲面バンドルの 2 重分岐被覆空間として構成する，
- ・写像類群における正関係子を利用して構成する，
- ・チャートを利用して構成する

などの方法があり，これらを用いて必要とする Lefschetz 束空間を構成する．更に，シンプレクティックトポロジーを用いて，構成された Lefschetz 束空間の分類を行う．

研究目的 2 : Lefschetz 束空間の「小平次元」の研究

Lefschetz 束空間のファイブレーション構造を反映する「小平次元」を定義する．そのために複素曲面の場合を参照モデルとしてとらえ，ファイバーの類 F を含む因子の「飯高 - 小平次元」(因子次元) を考察する．ファイブレーションが正則な Lefschetz 束空間に対して，因子 $K_X + F$ (F の対数的飯高 - 小平次元) や因子 $K_X + rF$ ($r \in \mathbb{Q}$) (有理係数 F の対数的飯高 - 小平次元)，あるいは，標準類 K_X を相対標準類 K_F に変えたものの因子次元を計算し計算データを集めることから始める．これらのデータを解析して，その因子次元が分類の大枠として用いることができるかどうかを検証する．候補として定めたものについて，小平次元のシンプレクティック版の定義の仕方を模範にして，因子次元の計算データから Lefschetz 束空間の「飯高 - 小平次元」の定義を考察する．次の段階として，これら小平次元のシンプレクティック版，ファイブレーション構造を反映した小平次元のシンプレクティック版のシンプレクティック構造そのものからの定義を試みる．代数幾何学的には因子次元は，因子 D が定める多重写像の埋め込み次元として，あるいは，因子 D の層係数コホモロジー群のベッチ数の挙動の様相を通じて定義される．このことを参考にして，これらの事柄がシンプレクティック構造をもとに書き換えることができるかどうかを検証する．

4. 研究成果

(1) 研究目的 1 の項目について：

種数 3 以上の非極小 Lefschetz 束空間について，十分に多くの自己交差数 -1 の球面を含む場合の標準類を完全に決定することができ，これによりこの場合の geography 問題 ①についての満足すべき結果を得た．また，

botany 問題②についても，分類するところまではいかなかったが，対応する格子点上に Lefschetz 束空間が存在することを証明した．また，これらの研究により，Lefschetz pencil の小平次元と baselocus の点の個数との関係についてもとらえることができた．本研究により，このファイブレーション構造を通じて，シンプレクティック 4 次元多様体の地誌学問題の解を得ることができ，また，非極小レフシェッツ束の標準類を決定しこれらの小平次元を計算することができた．

(2) 研究目的 2 の項目について：

先にも述べたように，あるクラスの種数 3 以上の非極小 Lefschetz 束空間の標準類を完全に決定することができたので，これにより，このクラスのシンプレクティック版小平次元を計算することができた．その応用として，小平次元を利用して，ある 4 次元多様体のエキゾチック微分構造の存在を証明することができた．ファイブレーション構造を反映した飯高 - 小平次元については，正則な代数曲線束のファイバー類 F による因子次元の計算，及び， F の対数的飯高 - 小平次元の計算を実行し，計算データを集めた．その結果により，一応のシンプレクティック版を考察することができた．しかしながら，これにより提唱される飯高 - 小平次元のシンプレクティック版が真にファイブレーション構造を反映しているかどうか等の検証，及び，シンプレクティック構造そのものからの再定義の仕方についての結果を出すまでには至ることができなかった．これは今後の研究課題である．

一連の研究活動を通じて，非極小 Lefschetz 束空間のシンプレクティックトポロジック的観点からの研究と代数幾何学的観点からの研究の方向性を示すことができたのは最大の研究成果であると考えられる．現在では，国内外の多くの研究者が非極小 Lefschetz 束空間について研究するようになり， (-1) -切断の本質的な個数， (-1) -切断のと写像類群の正関係子との関係，スロープの振る舞い等について，多くの研究結果が発表されるようになった．これまでに開発，発展してきた非極小 Lefschetz 束空間の研究技術・道具を整理・公表し，それにより新しい研究成果を生み出す目的のために，平成 26 年 3 月に研究集会「写像類群における関係とレフシェッツ束空間」(平成 26 年 3 月 19 日～3 月 21 日 於 九州工業大学サテライト福岡天神，科研費：基盤研究(A)研究課題番号 24244005 研究代表者 河内明夫(大阪市立大学)，基盤研究(C)研究課題番号 2354009(本課題研究)研究代表者 佐藤好久(九州工業大学)及び，文部科学省「卓越した大学院拠点形成支援補助金」(九州大学)による援助)を開催した．また，この研究集会の報告集を作成し，主要研究機関付属図書館・付属図書室へ寄贈した．

5. 主な発表論文等

[雑誌論文] (計 10 件)

① Hirose, S. and Sato, M.: *A minimal generating set of the level 2 mapping class group of a non-orientable surface*, Math. Proc. Cambridge Philosophical Soc., **157** (2014), 345-355, 査読有, DOI: 10.1017/S0305004114000358

② Sato Y.: *Canonical classes and the geography of nonminimal Lefschetz fibrations over S^2* , Pacific J. Math., **262** (2013), 191-226, 査読有, DOI: 10.2140/pjm.2013.262.191

③ Hirose, S. and Monden, N.: *Degree of roots of disk twists on 3-dimensional handlebodies*, Geometriae Dedicata, **164** (2013), 73-82, 査読有, DOI: 10.1007/s10711-012-9759-4

④ 遠藤久顕: Lefschetz ファイバー空間のファイバー和による安定化について, 研究集会「リーマン面に関連する位相幾何学」予稿集, (2012), 38-41, 査読無

⑤ Hirose, S.: *On diffeomorphisms over nonorientable surfaces standardly embedded in the 4-sphere*, Algebraic and Geometric Topology, **12** (2012) 109-130, 査読有 DOI: 10.2140/agt.2012.12.109

⑥ Endo, H., Mark T.E. and J. Van Horn-Morris: *Monodromy substitutions and rational blowdowns*, J. Topology, **4** (2011), 227-253, 査読有, DOI: 10.1112/jtopol/jtq041

⑦ Hirose, S. and Yasuhara A.: *Regular homotopic deformation of compact surface with boundary and mapping class group*, J. Knot Theory and its Ramifications, **20** (2011), 1391-1396, 査読有, DOI: 10.1142/S021821651100925X

他 3 編

[学会発表] (計 49 件)

① 佐藤好久: レフシェッツ束空間とシンプレクティック小平次元, Branched Coverings, Degenerations, and Related Topics 2015, 2015 年 2 月 22 日, 東北学院大学工学部多賀城キャンパス

② 遠藤久顕: 一般化されたチャートと Lefschetz ファイバー空間, 研究集会「写像類群における関係とレフシェッツ束空間」, 2014 年 3 月 21 日, 九州工業大学サテライト福岡天神

③ 佐藤好久: レフシェッツ束空間における(−1)-球面の概説, 研究集会「写像類群における関係とレフシェッツ束空間」, 2014 年 3 月 19 日, 九州工業大学サテライト福岡天神

④ Endo, H.: *Chart description for hyperelliptic Lefschetz fibrations and their stabilization*, Seminaire de topologie et geometrie algebrique, 2014

年 3 月 13 日, Universite de Nantes, France

⑤ Ashikaga, T.: *An extended Zagier reciprocity for Dedekind sum via cyclic quotient singularities*, Topology of Singularities and Related Topics III, 2012 年 3 月 29 日, Dalat Univ. VIETNAM

⑥ Ashikaga, T.: *Toric modification of cyclic orbifolds and Dedekind sums*, WCU workshop on classification and construction of algebraic varieties, 2012 年 3 月 26 日, Dalat Univ. Vietnam

⑦ Hirose, S.: *On diffeomorphisms over non-orientable surfaces standardly embedded in the 4-sphere*, The 8th East Asian School of Knots and Related Topics, 2012 年 1 月 11 日, KAIST, Daejeon, Korea

⑧ Sato Y.: *The base loci and the Kodaira dimension of Lefschetz pencils*, The 3rd KOOK-TAPU Joint Seminar on Knot Theory and Related Topics, 2011 年 7 月 26 日, 大阪市立大学学術情報総合センター
他 41 件

[図書] (計 1 件)

① Hirose, S.: *Deformations of surfaces embedded in the 4-dimensional manifolds and their mapping class groups*, Higher Education press, Beijing-Boston, Handbook of Group Actions, 2015, 25 ページ

6. 研究組織

(1) 研究代表者

佐藤 好久 (SATO, Yoshihisa)
九州工業大学・大学院情報工学研究院・教授
研究者番号: 90231349

(2) 研究分担者

足利 正 (ASHIKAGA, Tadashi)
東北学院大学・工学部・教授
研究者番号: 90125203

(3) 研究分担者

廣瀬 進 (HIROSE, Susumu)
東京理科大学・理工学部・准教授
研究者番号: 10264144

(4) 研究分担者

遠藤 久顕 (ENDO, Hisaaki)
東京工業大学・大学院理工学研究科・教授
研究者番号: 20323777