様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成　２９　年　　６　月　１５　日現在

機関番号：　２２３０１
研究種目：　基盤研究(C)　(一般)
研究期間：　2011～2016
課題番号：　２３５４０１００

研究課題名（和文）連続関数族に対する拡張作用素の構造の解明

研究課題名（英文）Construction of extender for continuous maps

研究代表者

山崎　薫里（Yamazaki, Kaori）

高崎経済大学・経済学部・教授

研究者番号：８０３０１０７６

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,800,000円

研究成果の概要（和文）：連続関数族の拡張問題に関して，関数（写像）族への作用素からの研究，および，内挿理論からの研究を行った．単調可算パラコンパクト性を，順序位相ベクトル空間を終域とする写像族への作用素を用いて特徴づけた．また，終域が正の内点をもつ順序位相ベクトル空間の場合，及び，両有界完備で両連続な半順序集合の場合に，Dowker-Katetovタイプの内挿定理を与えた．

研究成果の概要（英文）：For extension problems of continuous maps, assignment for maps and insertion theory are studied. Monotone countable paracompactness is characterized by using assignment for maps with values in ordered topological vector spaces. Moreover, generalized Dowker-Katetov insertion theorems are also given for maps with the following ranges: (i) ordered topological vector spaces with positive interior points, (ii) bi-bounded complete and bicontinuous posets.

研究分野：　位相空間論

キーワード：　拡張問題　内挿理論　拡張作用素　半連続写像　順序位相ベクトル空間

1. 研究開始当初の背景

(1) 連続関数（族）の拡張問題は，歴史的には，終域に関する研究はレトラクト理論やANR 理論として発展してきた．一方，定義域に関する条件は，終域がバナッハ空間の場合には正規開被覆の拡張として統一して表現できることがAló，Shapiro，森田によって示された．このことは，チェックコホモロジー，シェイプ理論や次元論等の正規開被覆に依存する分野において，拡張定理が基本的な道具であることを示している．

(2) J. Dydak は 1996 年，「J. Dydak, Extension Theory: the interface between set-theoretic and algebraic topology, Topology and its Appl. 74 (1996), 225-258」において，被覆次元とコホモロジカル次元を統一して議論できるかという視点から，幾何学的トポロジーと代数的トポロジーの諸問題が１の分割の拡張問題に帰着できるという理論を発表した．論文中で提出された問題の一部は，研究代表者 (2003)，大田 - 研究代表者(2006) により解決されたが，残された問題は技術的な難点が解消できておらず未解決のままであった．ある種の良い性質を備えた１の分割は，幾何学的な表現を与えることができる一方，その証明方法は開被覆等の集合の拡張という位相空間における古典的な問題に関連する．特に，連続関数族のもつよい性質をどのように保存するかという視点は，拡張作用素としてどのような構造を持つかという問題として整理できる．

(3) 拡張問題は，より強い理論である連続選択理論や内挿理論の枠組みで捉えられることが知られている．しかし，連続選択理論や内挿理論では，通常，近似の精度を高めて連続関数を構成していく手法をとるため，終域にバナッハ空間等の完備性が必要となる．特に，終域を $C_0(Z)$や $c_0(\kappa)$等のバナッハ束とした内挿理論の研究が，Gutev-大田-研究代表者 (2003)，山内(2008)，研究代表者(2010)等によりなされ，連続選択関数の手法を用いることが研究の端緒になった．一般のバナッハ束への内挿理論に関しては，Borwein と Théra による論文「J.M.Borwein, M. Théra, Sandwich theorems for semicontinuous operators, Can. Math. Bull. 35 (1992), 463-474」において導入された概念を，研究代表者の 2010 年の論文「K.Yamazaki, Insertion theorems for maps to Banach lattices, Topology and its Appl. 157 (2010), 1955-1965」において，より扱いやすいものに一般化した．このように，拡張問題は完備性を備える空間を終域とする場合には，かなり解明されたといってよい．一方で，一般のベクトル空間やベクトル空間とは限らない空間への連続関数族の拡張に関しては，殆ど進展は見られていない．

2. 研究の目的

(1) 連続関数族の拡張，および，その概念を包括する連続選択理論または内挿理論に関して，終域に完備性を持たない空間を設定することを試みる．

(2) 写像族に対する作用素を，定義域の位相的性質として記述することを試みる．

(3) 終域の構造を生かした新たな内挿定理を与え，それを用いて，Dydakの提出した問題の中で未解決なもの，及び，関連する問題への解決を図る．

3. 研究の方法

(1)「半連続写像」の用語は，文献によって異なる定義が採用されているために，先行研究の解釈に齟齬が出ている部分があった．そのため，基本的文献の定義，および，文献で使用されている先行結果を精読する．また，終域を位相の視点から統一して記述することで研究の見通しを立てる．

(2) 単調可算パラコンパクト性を，写像族への作用素を用いて記述する．特に，Good, Knight および Stares のよる論文「C.Good, R.Knight, I. Stares, Monotone countable paracompactness, Topology and its Appl. 101 (2000), 281-298」では，単調可算パラコンパクト性は，ある種の単調性をもった実数値関数族に対し，よい性質を保ったまま実数値関数族を対応させる作用素の存在として表現できることが示されていた．この結果は，拡張ではなく拡大を扱うものであるが，一般に拡大性は拡張性と関連があることが知られている．そのため，Good-Knight-Stares の結果を，順序位相空間を終域とする写像への一般化することを試みる．

(3) 拡張問題に対し，特に，内挿理論を用いたアプローチを図る．一般に，有界閉区間[0,1]を終域とする場合，連続選択理論→内挿理論→拡張理論，という関係が知られている．内挿理論は連続選択関数ほど強力ではないが，一方で，終域に完備性を備えない空間を扱う場合には，さほど強力でな

いゆえの扱いやすさが有用であると予想される．Katětov-Tong および Dowker-Katětov の内挿定理を，終域に完備性を要求しない空間へ一般化することを試みる．ここで，Katětov-Tong および Dowker-Katětov の内挿定理とは，以下のものである．

Katětov-Tong の内挿定理(1951/52/53)．
X を位相空間とする．このとき，任意の上半連続関数 f:X→R と，f≤g となる任意の下半連続関数 g:X→R に対し，f≤h≤g となる連続関数 h:X→R が存在するための必要十分条件は，X が正規空間となることである．

Dowker-Katětov の内挿定理(1951/53)．
X を位相空間とする．このとき，任意の上半連続関数 f:X→R と，f<g となる任意の下半連続関数 g:X→R に対し，f<h<g となる連続関数 h:X→R が存在するための必要十分条件は,X が正規可算パラコンパクト空間となることである．

４．　研究成果

以下，(1)の研究は写像族の作用素からの研究，(2)および(3)の研究は，拡張理論を包括する内挿理論からの研究であるが，(2)は終域がベクトル空間である場合，(3)は終域がベクトル空間とは限らない場合の研究である．

(1)ベクトル空間を終域とする写像族への作用素を用いた位相的性質の研究．

Good-Knight-Staresの結果の終域Rを，順序位相ベクトル空間に拡張する以下の結果を得た．

定理．位相空間 X と，正の内点をもつ順序位相ベクトル空間 Y に対して，次の 3 条件が同値である．

- X は単調可算パラコンパクトである．
- 局所的に上に有界な写像 f:X→Y に対し，f≤Φ(f)である局所的に上に有界な下半連続写像Φ(f):X→Y で，f≤g ならばΦ(f)≤Φ(g)となるような作用素Φが存在する．
- 上半連続写像 f:X→Y に対し，f≤Φ(f)≤Ψ(f)である下半連続写像Φ(f):X→Y と上半連続写像Ψ(f):X→Y で，f≤g ならばΦ(f)≤Φ(g)かつΨ(f)≤Ψ(g)となるような 2 つの作用素Φ，Ψが存在する．

さらに，Y が位相ベクトル束であるとき，次の条件も同値である．

- 局所有界な写像 f:X→Y に対し，|f|≤Φ(f)である局所有界な下半連続写像Φ(f):X→Y で，|f|≤|g|ならばΦ(f)≤Φ(g)となるような作用素Φが存在する．

上述の結果は，オリジナルな Good，Knight および Stares の定理の自然な拡張であるが，証明そのものよりも，終域に正の内点をもつ順序位相ベクトル空間を設定したことにその独創性がある．実際，この論文を契機に「正の内点をもつ順序位相ベクトル空間」を終域とする写像の作用素を用いた定義域の位相的特徴づけの研究報告が，近年盛んに行われている．上述の結果を拡張作用素の構造に応用することには至らなかったが，副産物として，順序位相ベクトル空間の基礎研究に貢献している．実際，この研究は，順序単位元に関する Yang の 2017 年の論文で提出された問題に否定解を与えた研究代表者による最近の結果へつながった．

(2) 正の内点をもつ順序位相ベクトル空間への内挿定理の研究．

順序位相ベクトル空間 Y の 2 点に対し，その差が正錘の内点に属することを用いて Y に関係$<_Y$を導入する手法は，Borwein-Théra で与えられた．Y 上の関係を，Y に上下の無限遠点を加えた拡張順序位相ベクトル空間 $\hat{Y}$ に拡張することで，拡張位相ベクトル空間への半連続写像を再定義した．これは，Borwein-Théra の定義と本質的には同じものであるが，拡張空間 $\hat{Y}$ に適当な位相を導入したことで，より明快な構成を与えることができた．この準備のもと，以下の定理を得た．

定理．X を位相空間，Y を正の内点をもつ自明でない可分順序位相ベクトル空間とする．このとき，下半連続写像 f:X→$\hat{Y}$ と g$<_{\hat{Y}}$f となる上半連続写像 g:X→$\hat{Y}$ に対し，g$<_{\hat{Y}}$h$<_{\hat{Y}}$f となる連続写像 h:X→$\hat{Y}$ が存在するための必要十分条件は，X は正規可算パラコンパクトとなることである．

この定理は，Dowker-Katětov の内挿定理を一般化するのみならず，部分集合上で定義された写像の未定義部分を無限遠点へ拡大することにより，拡張定理を導くものである．実際，このような「よい空間への埋め込み」は位相空間論ではよく知られた有用な手法であるが，それを順序位相ベクトル空間へも新たに導入したものである．特に，挿入範囲に上限・下限が与えられない場合にも内挿を実現できる利点が生まれる．

(3) 半順序集合を終域とする内挿定理の研究．

終域をベクトル空間とは限らない半順序

集合とする内挿定理として,ハリネズミ空間をモデルとするような有界完備な順序の入った位相空間を終域とした 2008 年の Gutiérrez Garcia, Kubiak および Prada Vicente の論文「J.Gutiérrez Garcia, T. Kubiak, M. A. de Prada Vicente, Generating and inserting continuous functions with values in boubded complete domains and hedgehog-like structures, Houston J. Math. 34 (2008), 123-144」が知られている．本研究では，扱う終域をより広く設定し，領域理論等では標準的な概念である way-below 関係を用いて，以下の内挿定理を得た．ここで，≪は way-below 関係を，$\ll_d$ は way-above 関係を表す．

定理．X をパラコンパクトなハウスドルフ空間，P を両有界完備，両連続，弧状連結な位相半順序集合とする．任意の下に有界な上半連続写像 f:X→P と任意の下半連続写像 g:X→P について，各点補間可能であるとき（すなわち，X の各元 x に対し $f(x)\ll_d y_x \ll g(x)$ となる y_x が存在するとき)，$f\ll_d h\ll g$ となる連続写像 h:X→P が存在する．

領域理論での扱いと異なり，内挿定理の終域には，実数やバナッハ束等の関数空間の拡張として上下の対称性が要求されることが自然であるが，way-below 関係≪はこの対称性を持たない．そのため，way-below 関係に way-above 関係を併用することにより対称性を保証したことが研究の鍵となった．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 5 件）

① Kaori Yamazaki, Insertion of poset-valued maps with the way-below and -above relations, Topology and its Applications, 掲載決定, 査読有．

② Kaori Yamazaki, Insertion theorems for maps to ordered topological vector spaces, Topology and its Applications, 195 (2015), 312-326, 査読有. DOI:10.1016/j.topol.2015.09.037.

③ 山﨑 薫里, Insertion theorems for maps to ordered vector spaces, 集合論的・幾何学的トポロジーと種々の分野の交流, 京都大学数理解析研究所講究録 1932, p36-41, 査読無, 2015 年 1 月．

④ Kaori Yamazaki, Monotone countable paracompactness and maps to ordered topological vector spaces, Topology and its Applications, 169 (2014), 51-70, 査読有. DOI:10.1016/j.topol.2014.02.032.

⑤ 山﨑 薫里，古典的挿入定理における写像の終域について，一般及び幾何学的トポロジーとその応用，京都大学数理解析研究所講究録 1781，p103-107，査読無，2012 年 3 月．

〔学会発表〕（計 3 件）

① 山﨑 薫里，Insertion of maps into bicontinuous lattices，2016 年度ジェネラルトポロジーシンポジウム，2016.12.8，筑波大学（茨城県・つくば市）．

② 山﨑 薫里，Insertion theorems for maps to ordered vector spaces,集合論的・幾何学的トポロジーと種々の分野の交流，2014.10.23，京都大学数理解析研究所（京都府・京都市）．

③ 山﨑 薫里，順序線形位相空間への半連続関数とその応用,つくばセミナー，2013.3.13，筑波大学（茨城県・つくば市）．

６．研究組織

(1)研究代表者
山﨑 薫里 （YAMAZAKI KAORI）
高崎経済大学・経済学部・教授
研究者番号：80301076

(2)研究分担者
なし

(3)連携研究者
なし

(4)研究協力者
なし