様　式　C－19、F－19、Z－19　（共通）

科研費 KAKENHI

# 科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 26 年　 6 月　 6 日現在

機関番号：２４３０３
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2011～2013
課題番号：２３５４０１０１

研究課題名（和文）群作用の軌道構造を保つ同変写像の存在問題および分類問題の研究

研究課題名（英文）Existence and classification problems of equivariant maps preserving orbit structures

研究代表者
長崎　生光（Ikumitsu, Nagasaki）

京都府立医科大学・医学（系）研究科（研究院）・教授

研究者番号：５０１９８３０５

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,300,000円、（間接経費）　　990,000円

研究成果の概要（和文）：　本研究ではBorsuk-Ulam型定理や順序極小トポロジーの観点から等変写像の存在問題および分類問題を研究した．等変写像とは２つのG空間の間のG同変連続写像で軌道構造を保つものをいう．本研究で以下の結果を得た．
(1) 表現空間の間の等変写像について，等変Borsuk-Ulam定理が成立する新たな有限群の族を発見した．これは等変写像の存在性の必要条件を与える．
(2) 分類問題に関しては，G自由多様体から表現空間への等変写像の等変ホモトピー類を考察し，ある条件下では，多重写像度により，等変ホモトピー類が分類できることを示した．これは 古典的なHopfの定理の一般化である．

研究成果の概要（英文）：In this research, we studied the existence and classification problems of isovariant maps from the viewpoint of the Borsuk-Ulam theorem and the o-minimal topology. The isovariant map between G-spaces is an equivariant map preserving their orbit structures. We obtain the following results: (1) We found new families of finite groups for which the isovariant Borsuk-Ulam theorem holds. This provides a necessary condition for the existence of isovariant maps. (2) In the classification problem, we consider isovariant homotopy classes of isovariant maps from a closed free G-manifolds to a sphere of a representation space, and in suitable situation, we obtain that the multidegree classifies isovariant homotopy classes. This result is a generalization of the classical Hopf theorem.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：変換群　同変トポロジー　Borsuk-Ulam型定理　等変写像　順序極小構造

## １．研究開始当初の背景

G 空間の軌道構造を保つ同変写像 f : X → Y はイソトロピー群（スタビライザー）について $G_x=G_{f(x)}$ をみたす同変写像として特徴付けられる．このような写像は G 空間の軌道構造を保ち，等変写像 (isovariant map) といわれる．当初，等変写像は Palais により軌道写像の分類に応用されたが，その後，群作用をもつ多様体，すなわち同変多様体の分類問題にも応用され，同変手術理論の発展とともに，1980 年代後半 Browder により「強ギャップ条件のもとで，同変ホモトピー同値写像は等変ホモトピー同値写像に同変ホモトピックである」との結果が報告された．2006 年に半自由作用の場合の別証明が Schultz によって与えられ，この結果は等変性を用いた同変多様体の分類問題の研究おいて基盤となる結果となった．さらに Cappell, Weinberger, Yan らは等変性の枠組みで同変手術理論を展開し，同変多様体の新しい分類理論を構築しつつあった．また，Connolly, Davis, Khan らは，擬自由作用をもつ多様体について，ある種の等変性のもとで，Quinn により提出された同変 Borel 予想が成り立つこと（等変位相的剛性定理）を報告していた．一方，我々は Wasserman の先行研究を発展させ，等変写像の Borsuk-Ulam 型定理を研究してきた．このように近年において様々な角度から等変写像の重要性が認識されつつあった．

## ２．研究の目的

以上のような背景のもと我々は，等変写像の基礎理論として，以下の 3 点を重点的に解明することを目的とした．
(1) 第１の目的は，「等変写像の存在・非存在問題」の解明である．等変性を仮定した同変手術理論は一般に等変ホモトピー同値写像などの存在を仮定して理論が展開されているが，その存在性は明らかでない．そこで，Borsuk-Ulam 型定理の観点から等変写像の存在・非存在性を研究し問題の解明を目指した．
(2) 第２の目的は，「等変写像の等変ホモトピー類の分類問題」の解明であった．同変閉多様体から表現球面への同変写像 f : M → SW の同変ホモトピー類の分類問題を中心に，等変ホモトピーによる分類定理（等変 Hopf 型定理）の確立を目指した．
(3) 第３の目的は，「等変写像の変形問題および近似定理」の解明であった． (1)，(2) の研究を基盤に，同変写像の同変ホモトピーによる等変写像への変形可能性を考察し，等変性の位相的，幾何的役割を明らかにすることを目的とした．そのために，変形問題とともにこれらの近似定理を等変写像で考察し，等変近似定理の確立を目指した．

## ３．研究の方法

(1) 長崎生光と川上智博の２名の体制で，３年間にわたり研究を進めた．長崎は研究の遂行と共に，研究代表者として研究全体の統括をした．川上は，長崎と密に連携しながら近似定理を主として担当した．両者は毎年，研究セミナーを開催し，研究の進展具合を確認しながら，個々の研究を行った．
(2) 存在・非存在問題と分類問題は平行して研究を進めた．存在問題は等変 Borsuk-Ulam 型定理と密接な関係があるのでその一般化をすることで等変写像の存在・非存在問題を研究した．分類問題に関しては同変障害理論を利用し研究を進めた．
(3) 変形問題の解明には近似定理が重要な役割を果たすことが予想されたので，まず，近似定理の解明を目指した．そのために順序極小トポロジーの手法を用いて研究を進めた．

## ４．研究成果

(1) <u>等変写像の非存在性</u>．G はコンパクト・リー群とする．G 表現空間 V, W の間の等変写像 f: V → W が存在するとき，Borsuk-Ulam 不等式

$$\dim V - \dim V^G \leqq \dim W - \dim W^G$$

が成り立つとき G を Borsuk-Ulam 群という．また，G の任意の(閉)部分群が Borsuk-Ulam 群であるとき，G を強 Borsuk-Ulam 群という．Wasserman による研究により素数条件をみたす有限群や可解コンパクト・リー群 G は Borsuk-Ulam 群であるが，その他の場合は未解決であった．ここで素数条件とは G の組成列に現れる単純群 $G_i$ について，$G_i$ の位数を割る素数 p の逆数の和が１以下になるという条件である．

本研究では部分群の半順序集合に関するメビウス関数と表現論，群論の応用により，新たな Borsuk-Ulam 群の族を発見することに成功した．さらにこれらは強 Borsuk-Ulam 群でもあることが証明された．また，Wasserman の素数条件をみたす有限群も強 Borsuk-Ulam 群になることが証明された．

<u>定理１</u>．以下の群は強 Borsuk-Ulam 群である．
( i ) SL(2,q), PSL(2,q), GL(2,q), GPL(2,q).
( ii ) G の 2-Sylow 部分群が巡回群，二面体群，一般四元数群である有限群．
(iii) G の p-Sylow 部分群（p は G の位数を割る素数）が巡回群である有限群．

これらの群の中には Wasserman の素数条件をみたさない例も含んでおり，真に新しい Borsuk-Ulam 群の例を与える．

これらのキーになる結果は Borsuk-Ulam 不等式

$$\dim V - \dim V^G \leqq \dim W - \dim W^G$$

に関する G の指標とメビウス関数を用いた新規の評価式にある．

(2) <u>等変写像の存在性</u>．等変 Borsuk-Ulam 型定理の逆問題でもある存在性に関する研究を表現空間の場合に行った．

表現空間 V, W の間の双方向に等変写像が

存在するとき,VとWは等変写像同値という．等変写像同値は同値関係であるのでこの同値関係での分類の研究を進めた．G が強 Borsuk-Ulam 群であれば，G 不動点自由な V と W の次元関数について Dim V = Dim W が成り立つ．ここで Dim V は部分群の集合 S(G)から整数の集合 **Z** への関数で

$$(\mathrm{Dim}\ V)(H)=\dim V^H,\ H\in S(G)$$

で定義される．

G が強 Borsuk-Ulam 群のとき，G 不動点自由な表現空間 V,W が等変写像同値ならば次元関数について Dim V = Dim W がなりたつ．そこで本研究では Dim V = Dim W のとき，双方向の等変写像がいつ存在するかという問題を考察し，以下の結果を得た．

<u>定理２</u>．コンパクト・アーベル群 G の G 不動点自由な表現空間 V，W について Dim V = Dim W ならば V と W は等変写像同値である．

このような結果は同変写像では成り立たたない．非アーベル群については一般には未解決であるが，二面体群の 2 次実既約表現 V，W について Dim V = Dim W であるが，その間に等変写像が存在しない例が見つかっている．

対称群 $S_n(n\leqq 11)$は強 Borsuk-Ulam 群であるので G 不動点自由な表現 V，W について，等変写像同値ならば次元関数が一致する．さらに $S_n$ の指標の整数性より，次元関数が一致すれば $S_n$ 表現は互いに同型である．以上のことから以下の結果が得られた．

<u>定理３</u>．対称群 $S_n(n\leqq 11)$の不動点自由な表現 V，W について，等変写像同値ならば同型である．

これは一種の剛性定理であり，等変写像の独自性が現れている．

(3) <u>等変写像の分類</u>．等変写像の等変ホモトピー類の分類問題を考察するにあたり，Hopf 型の定理を考察が必要になる．そのために本研究では G 作用のない場合で Hopf 型の定理を考察した． A は $\mathbf{C}^n$ の k 次元分空間配置，$M_A$ はその補空間とする．d=n-k とし，2d-1 次元連結閉多様体 N を考える．このとき，以下の結果を得た．

<u>定理４</u>．$M_A$ の基本群はアーベル群とする．

(ｉ) N が向き付け可能のとき全単射

$$[N,\ M_A]\cong\oplus Z\ (|A|\text{個の直和})$$

が存在する．

(ii) N が向き付け不可能のとき全単射

$$[N,\ M_A]\cong\oplus Z/2\ (|A|\text{個の直和})$$

が存在する．

これらの全単射は多重写像度で与えられ，古典的な Hopf の定理の拡張になっている．多重写像度を等変写像に適用するとある種の場合に等変写像の等変ホモトピー類の分類が可能になる．M は連結閉 G 自由多様体,SV は複素表現空間の球面とする．$[M,\ SV]^{isov}$ は M から SV への等変ホモトピー集合とする．このとき以下の結果を得た．

<u>定理５</u>．$\dim M = \dim SV - \dim SV^{>1}-1$ とする．$SV^{>1}$ は特異集合を表す．

(ｉ) M が向き付け可能で G 作用が向きを保つとき，全単射

$$[M,\ SV]^{isov}\cong\oplus Z$$

が存在する．

(ii) M が向き付け不可能で G が奇数位数のとき，全単射

$$[M,\ SV]^{isov}\cong\oplus Z/2$$

が存在する．

ここで直和の個数は,$k=\dim SV^{>1}$ とするとき，V の k 次元部分空間の個数である．

上記以外の場合，すなわち M が向き付け可能で G 作用が向きを保つとは限らないときや，M が向き付け不可能で G が偶数位数のときは多重写像度のみでは分類できないが，同変障害理論を適用し，同変コホモロジー群を計算することで，$[M, SV]^{isov}$ の構造を決定できた．

(4) <u>同変順序極小トポロジー</u>．順序極小な実閉体上のトポロジーが近年発展している．これは実半代数的集合や Nash 多様体論の研究の一般化である．F が実閉体とは順序体であり $F(\sqrt{-1})$が代数的閉体になるものである．実数体は実閉体である．実代数的数全体の集合 $R_{alg}$ は最小の実閉体である．実閉体上の順序極小構造を与え，その構造での定義可能集合および定義可能写像を考えると多くのトポロジーの結果の順序極小版が証明できる．我々は順序極小構造のもとで同変トポロジーを展開し，等変写像の変形および近似定理の研究を進めた．主な結果は以下の通りである．

① 定義可能 $C^2$ 関数の空間の中で，定義可能モース関数は開かつ稠密である．

② 局所順序極小構造におけるセル分解定理が成り立つ．

③ 群 G をコンパクト・アフィン定義可能 $C^r$ 群とするとき,G 不変全射沈めこみ定義可能 $C^r$ 写像は,部分的定義可能 $C^r$-G 自明である．

④ 定義可能完備構造に対して,コンパクト・アフィン定義可能 $C^r$-G 多様体上の同変モース関数は,G 不変定義可能 $C^r$ 関数全体において,開かつ稠密である．

⑤ 定義可能 G 集合の各点に定義可能スライスが存在する．

⑥ 定義可能 G 集合に関する G ホモトピー拡張定理が成り立つ．

(5) <u>定義可能障害理論</u>．順序極小構造のもとでの定義可能障害理論を研究し，以下の結果を得た．

定理６．Y を定義可能連結集合とし，定義可能ホモトピーの意味で n-1 連結であるとする．X，A を定義可能 CW 複体とし，X は A に n 次元以下のセルを接着してできているとする．f: A → Y が定義可能写像ならば f の拡張である定義可能写像 F: X → Y が存在する．

## ５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 14 件）


① Nagasaki，I，Ushitaki，F，Searching for even order Borsuk-Ulam Groups，数理解析研究所講究録 1876 (2014) 107-111，査読なし．

② Kawakami，T，Definable slices，Bull. Fac. Edu. Wakayama Univ. 64 (2014)，1-8，査読あり．

③ Kawakami， T，Definable G-homotopy extensions，Bull. Fac. Edu. Wakayama Univ. 64 (2014)，9-11，査読あり．

④ 川上智博，長崎生光，デファイナブル障害理論，数理解析研究所講究録 1876 (2014) 136-142，査読無し．

⑤ Nagasaki，I，Ushitaki，F，New example of the Borsuk-Ulam groups，RIMS Kokyuroku Bessatsu B39 （2013），109-119， 査読あり．

⑥ Nagasaki，I，Remarks on equivariant and isovariant maps betwen representations，Studia Humana et Naturalia 47 (2013)，61-67，査読なし．

⑦ 長崎生光，牛瀧文宏，On Borsuk-Ulam groups，数理解析研究所講究録 1876 (2012) 36-43，査読無し．

⑧ Nagasaki，I，Homotopy clasification of maps from a closed manifold to the complement of a subspace arrangement，Studia Humana et Naturalia 46 (2012)，45-53，査読なし．

⑨ Kawakami，T，Takeuchi K，Tanaka，H，Tsuboi，A，Locally o-minimal structures，J. Math. Soc. Japan 64 (2012)，783-797，査読あり．

⑩ Kawakami，T，Piecewise definable $C^r$-G triviality and definable $C^r$-G compactification，Bull. Fac. Edu. Wakayama Univ. 63 (2012)，17-21，査読あり．

⑪ Kawakami， T，Equivariant definable Morse functions in definably complete structures，Bull. Fac. Edu. Wakayama Univ. 63 (2012)，23-28，査読あり．

⑫ Kawakami，T，Representative definable Cr functions on definable $C^r$-grous，Bull. Fac. Edu. Wakayama Univ. 62 (2011)，31-34，査読あり．

⑬ Kawakami，T，Definable Morse functions in a closed field，Bull. Fac. Edu. Wakayama Univ. 62 (2012)，36-38，査読あり．

⑭ Nagasaki， I，On isovariant mapping equivalent between representation spaces，Studia Humana et Naturalia 45 (2011)，45-52，査読なし．


〔学会発表〕（計 10 件）


① Nagasaki，I，Isovariant maps and strong Borsuk-Ulam groups，Knots，Manifolds and Group Actions，2013. 9. 11，Slubice，Poland

② 長崎生光，The isovariant Borsuk-Ulam theorem and its related topics，Symposium: Structures and Symmetry on Manifolds，2013. 3. 12，那覇

③ 川上智博，Structure theorem in o-minimal structures，RIMS 研究集会，2011. 11. 28，京都

④ 川上智博，Piecewise definable $C^r$-G triviality and definable $C^r$-G compactification，第 39 回変換群論シンポジウム，2012. 11. 25，東京

⑤ Nagasaki， I，On the exitence and non-existence of isovariant maps between representation spaces，Geometry of Manifolds and Group Axtions，2012. 9. 7，Gdansk，Poland

⑥ 川上智博，Equivariant definable Morse functions in definably complete structures，モデル理論の夏の勉強会 2012，2012. 8. 29，山梨

⑦ 長崎生光，ボルスクウラム群について，RIMS 研究集会：変換群の幾何の展開，2012. 5. 29,京都

⑧ 川上智博，Definable Morse functions in o-minimal structures，RIMS 研究集会：変換群の幾何の展開，2012. 5. 28,京都

⑨ 川上智博，Definable fiber bundles in o-minomal structures，第 38 回変換群論シンポジウム，2011. 11. 19，神戸

⑩ 長崎生光，Borsuk-Ulam 群の新しい例，日本数学会秋期総合分科会，2011. 9. 28，松本


〔その他〕

ホームページ等

http://www.f.kpu-m.ac.jp/y/math/nagasaki/research.html

## ６．研究組織

(1)研究代表者


長崎 生光（NAGASAKI，Ikumitsu）

京都府立医科大学・医学研究科・教授

研究者番号：50198305


(2)研究分担者


川上 智博 （KAWAKAMI，Tomohiro）

和歌山大学・教育学部・准教授

研究者番号：20234023