様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２８ 年　 ６ 月　 ８ 日現在

機関番号：３２６０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2011～2015
課題番号：２３５４０１０４
研究課題名（和文）２次元力学系の連結例外極小集合の分類

研究課題名（英文）Classification of connected exceptional minimal sets of 2-dimensional dynamical systems

研究代表者
中山　裕道（Nakayama, Hiromichi）

青山学院大学・理工学部・教授

研究者番号：３０２２７９７０

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,800,000円

研究成果の概要（和文）：　同相写像の軌道の様子を位相幾何学的に研究するのが離散力学系である．これまで，円周の力学系において大きな発見が得られてきた．本研究では，この次元をあげ，曲面の同相写像について研究を行った．その結果，曲面上の無限回微分可能な微分同相写像で，局所連結ではないが連結な極小集合を持つ例を初めて構成した．また，これに伴い，曲面上の微分同相写像の力学系的な特徴づけにも成功した．不変なコンパクト集合のうち，包括関係に関して極小なものを極小集合という．極小集合はどの力学系にも存在し，軌道が巻きついていく部分にあたる．この点で，新しい極小集合の発見は数学的に大きな貢献をなしたと考える．

研究成果の概要（英文）：The discrete dynamical system is a subject to examine the topological behavior of the orbits of homeomorphisms. We have many results on the dynamical study of the circle. In this study, we raised the dimension and studied diffeomorphisms of surfaces. As a result, we constructed a diffeomorphism of a surface with a connected minimal set which is not locally connected. Furthermore, we obtain some characterization of the dynamical behavior of diffeomorphisms of the surfaces. Among the compact invariant sets, the minimal sets in terms of the inclusion are called minimal sets. The orbits always wind around the minimal sets. In this sense, it is an important mathematical advance to find a new minimal set.

研究分野：位相幾何学

キーワード：位相幾何学　力学系理論

１．研究開始当初の背景

微分方程式の解を調べることは，自然現象や社会現象の将来を予測するという点で古くから研究されてきた．その後，１８世紀になり３体問題が提唱され，研究が大きく展開した．いま，３つの天体を考える．万有引力だけが働くとすると，運動方程式はすぐに与えられる．しかし，その解（軌道）は式に表すことができない．式で表せないことが証明さえされている．そこで，軌道が閉軌道かどうかといった定性的な性質だけを考えようとしたのが力学系である．

本研究の特色は以下の２点である．

(1)　考える対象を余次元２に上げること

(2)　軌道が巻きついていくことが多い極小集合に焦点を絞ること

(1) 当初，力学系では円周の微分同相写像について主に研究され，Denjoy-Siegel の定理などの重要な結果が得られた．その後，研究の中心が円周の微分同相写像のなす群に移っていった．幾何学的群論である．ここまでの対象は余次元１である．本研究は，原点に立ち戻り力学系理論を考えることにし，余次元２を研究することにした．３体問題は３次元多様体の非特異流なので，余次元２になる．微分同相写像の立場からすると，曲面の微分同相写像が余次元２にあたる．この点で，曲面の微分同相写像を主に考えることにした．
(2)一方，円周のような１次元の対象から，曲面のような２次元の対象にあげると，問題が難しくなり，得られてきた結果が極端に少なくなる．この点で問題点を絞らないと議論が散逸することが予想された．そこで，キーワードして，極小集合を念頭に置くことにした．

２．研究の目的

本研究では，「局所連結でないが連結な極小集合を持つ曲面の微分同相写像の構成と分類」を研究する．

力学系を研究する上で，極小集合は最も基本的な概念の１つである．ここで，同相写像ｆの極小集合 M とは，f (M)=M を満たすコンパクト集合で，包括関係について極小な（空でない）集合のことである．定義より必ず存在し，しばしば軌道が巻きつくところとなるため，複雑な軌道が出現する原因とされてきた．極小集合の例としては，周期点，円周，カントール集合などがある．多くの力学系では，極小集合の上での軌道の性質を調べることで全体の力学系を知ることもできる．

１次元力学系では非常に多くの結果が得られている．特に有名なのが Denjoy-Siegel の結果で，円周上の無限回微分同相写像が回転と位相共役になることを示した．１回微分可能な微分同相写像については Denjoy の反例があり，軌道がカントール集合に巻きついている．この定理の面白さに多くの研究者が集まってきた．このカントール集合が極小集合である．この点で，曲面の微分同相写像においても，極小集合を調べていけば，幾何学的に重要な発見を得られるのではないかと考えた．

一方，局所連結な極小集合については，これまでに局所連結な連結例外極小集合の分類をほぼ完了し，基本的には，シェルピンスキー・カーペットを一般化したものになることを示した（Bi's, H. Nakayama and P. Walczak, Locally connected exceptional minimal sets of surface homeomorphisms, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 54-3 (2004), 711-732）．そこで，局所連結でない連結例外極小集合について，本研究で研究することにした．

３．研究の方法

研究の方法としては，幅広い分野の専門家との情報交換を行うとともに，極小集合の視覚化のためにコンピュータを用いた．

旅費を使い研究打合せをおこなうことで，多くの有益な情報が得られた．また，研究の方針の妥当性も確認できた．条件を付けずに２次元力学系そのものを扱うという本質的な研究を行っているため，国内外を問わず，多くの研究者がこの研究の進展について，講演を聞いてくださった．また，中には研究の方針について，厳しい批評をされる方もいて参考になった．更に，関連する研究者との研究集会に参加した際，他の研究者の研究からも多くの刺激を受けた．その結果，円周の逆極限という発想にいたった．講演の後で，必ず聞かれるのが，新しく構成した極小集合が無限ワルシャワ円と同相かという問題である．これが，分類への原動力となった．

研究の際，コンピュータ・グラフィックを繁茂に用いた．この研究報告のグラフィックでもわかる通り，扱う極小集合が複雑なため視覚化が困難な場合がある．その場合はコンピュータ・グラフィックを用いた．また，研究発表の際も多用し，評判が良かった．

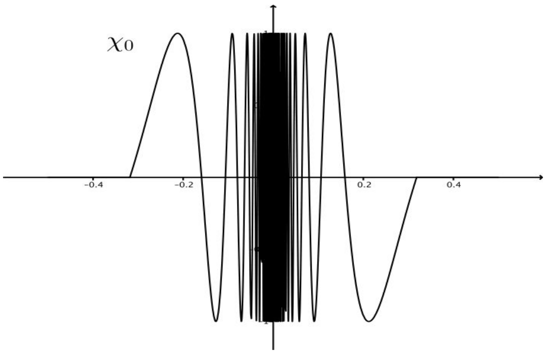
４．研究成果

(1) 局所連結でないが連結な極小集合を持つ曲面の微分同相写像の構成

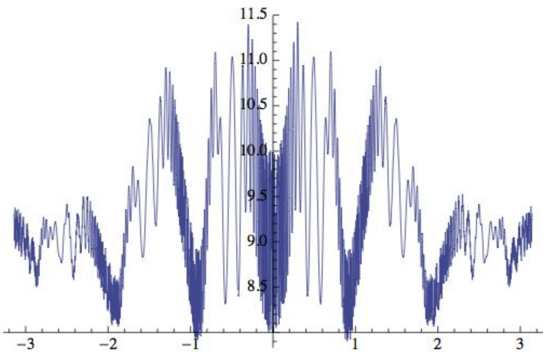
定理　２次元多様体上の無限回微分可能な微分同相写像で，局所連結でないが連結な極小集合を持つものを構成した．

局所連結でない連結極小集合をもつ同相写像は，Gottschalk-Hedlund により 1955 年に与えられている．この同相写像はこの極小集合の上だけで定義されており，外側への拡張が困難であった．

はじめに，集合と位相の授業でおなじみの y=sin(1/x)のグラフからなる集合を考える．



このグラフの閉包を $-\pi \leq x \leq \pi$ に制限し両端を同一視してできる図形を Warsaw 円という．このとき，この図形の y 軸部分の線分（特異線分）は他の部分と同相にならないので，Warsaw 円には極小な同相写像が存在しない．そこで，Gottschalk-Hedlund は特異線分を円周上に無限回埋め込み，局所連結でない連結極小同相写像の例を構成した（下図）．この図からして，外部に写像を拡張するのが困難であることが容易にわかるであろう．



　その後，46 年経った 1991 年に Walker は曲面の同相写像で，局所連結でない連結極小集合をもつ例を構成した．しかし，残念なことに，非常に複雑に軌道を織り込んでいくせいで，微分可能ではなかった．そこで，今回，曲面の微分同相写像で，局所連結でないが連結な極小集合を持つ例を構成しようと試みた．最初，Walker の例を改良しようと試みたが，極小集合がギザギザということもあり，なかなかうまくいかなった．しかし，最後に，円周の逆極限を使うことに気づき，局所連結でないが連結な極小集合を持つ曲面の微分同相写像の構成に成功した．

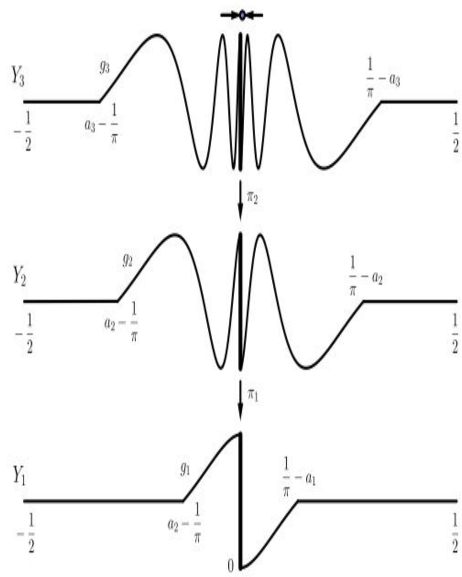
　ワルシャワ円($y=\sin(1/x)$のグラフの閉包を切り両端を同一視したもの)の

$$|x|\leq 2/((4n+1)\pi)$$

の部分を水平方向に特異線分につぶしてできる図形を Y_n とする（下図）．Y_n から Y_{n-1} への射影 $f_n:Y_n\to Y_{n-1}$ を，つぶす写像を使い自然に定義する．このとき，

$$\to Y_{n+1}\to Y_n\to \cdots \to Y_2 \to Y_1$$

円周の逆極限(Y_n, f_n)を取ると，ワルシャワ円と同相になる．



　今回利用した円周の逆極限は以下のものである．

q_n：十分大きい整数（$q_1=2$）

L_n：下により決められる整数($L_1=3$)

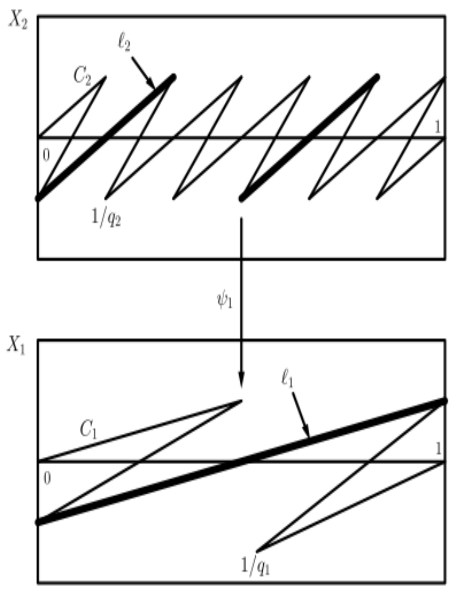
$L_n=(2q_n)/(L_1 L_2 \cdots L_{n-1})-1$

$X_n=\{(x,y);\ x\in S^1, |y|\leq 1\}$

次により，X_n の単純閉曲線

$$C_n:R/(L_n Z)\to X_n$$

を定義する（下図）．



$C_n(t)=(t, L_1\cdots L_{n-1}\,t\ -1/2)$

$(0 \leq t \leq 1/(L_1\cdots L_{n-1})$のとき）

$C_n(t)=(-t+2/(L_1\cdots L_{n-1}),$

$(L_1\cdots L_{n-1}\,q_n)/(q_n - L_1\cdots L_n)(t- L_n/q_n)-1/2)$

$(1/(L_1\cdots L_{n-1}) \leq t\leq L_n/q_n$のとき）

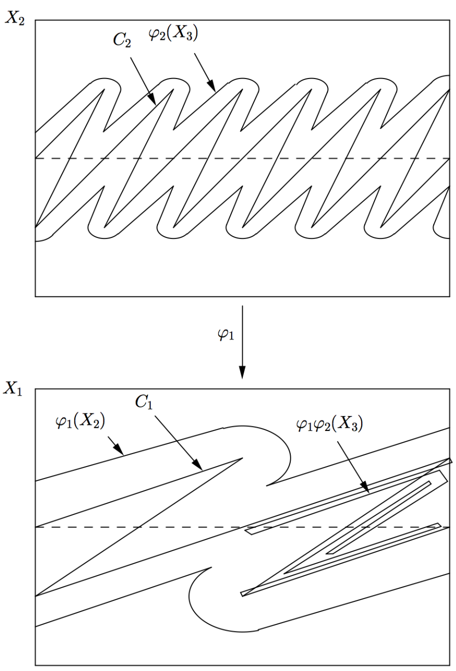
$C_n(t+L_n/q_n)=R(1/q_n)\,C_n(t)$

ここで，$R(1/q_n)$ は S^1 方向の $1/q_n$ 回転とする．円周の逆極限における円周としては，C_n のグラフを考える．一方，射影をとるため，連続写像 $\Psi_n:S^1\to S^1$ と $\psi_n:X_{n+1}\to X_n$ を

$\Psi_n\ (t)=p_1\ C_{n+1}(L_{n+1}\ t)$
$\psi_n\ (x,y)=C_n(L_n\ x)$
により定義する（ここで p_i は X_n における i 成分への射影とする（i=1,2））.

$$\begin{tikzcd} S^1 \arrow[r, "C_{n+1}(L_{n+1}t)"] \arrow[d, "\Psi_n"'] & X_{n+1} \arrow[d, "\psi_n"] \\ S^1 \arrow[r, "C_n(L_n t)"] & X_n \end{tikzcd}$$

この逆極限(S^1,Ψ_n)が極小集合になる.
そこで，これに厚みをつけていくことで C^∞微分同相写像を定義していく．詳しい条件は省略するが下図のように行う．ここで，図の下部に書かれたギザギザの図形が今回構成した極小集合である.
尚，この結果は論文にまとめ， Journal of the Mathematical Society of Japan の掲載が決定している.



(2) 曲面の微分同相写像における局所連結でないが連結な極小集合の分類

分類についても，部分的ではあるが結果を得ている．構成をする際，極小集合に弧が含まれることが多い．弧は外部から，弧で結ぶことができる．これを用い分類を試みた．その結果，局所連結でない連結極小集合が本質的に多重ワルシャワ円と同相であることがわかってきた．ここで多重ワルシャワ円とは，まさしく Gottschalk-Hedlund が構成した例の極小集合である．現在論文を執筆中の段階であり，フランスでの講演が決まっている.

なお，当初の研究目的でもあった「極小集合の遺伝的分解不可能性」については目立った結果が出せなかった．円周の逆極限を使った研究は間違いやすくチェックに非常に長い時間がかかる．遺伝的分解不可能性への展開は自然な流れではあるが手がつかなかった.

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　２　件）
①H. Nakayama, Surface diffeomorphisms with connected but not path-connected minimal sets containing arcs, Journal of the Mathematical Society of Japan，査読有，掲載決定.
②S. Matsumoto and H. Nakayama, Continua as minimal sets of homeomorphisms of S^2, Enseign. Math.(2), 査読有, 57 no. 3-4, 2011, 373-392.

〔学会発表〕（計　５　件）
① 中山　裕道，弧状連結ではないが連結な極小集合を持つ曲面の微分同相写像の構成，日本数学会秋季総合分科会，2015 年 9 月 15 日，「京都産業大学　(京都府京都市)」
②中山　裕道，Surface diffeomorphisms with connected but not path-connected minimal sets containing arcs，研究集会「葉層構造と微分同相群 2014 研究集会」，2014 年 10 月 23 日，「東京大学玉原国際セミナーハウス（群馬県沼田市）」
③H. Nakayama，Connected but not locally connected minimal sets of codimension two foliations，研究集会「Workshop Geometry and Dynamics of Foliations」ICMAT，2014 年 9 月 4 日，「Madrid (Spain)」
④H. Nakayama，Smooth embedding of the minimal homeomorphism of Gottschalk and Hedlund，研究集会「Foliations 2012」，2012 年 6 月 29 日，「Lodz (Poland)」
⑤中山　裕道，Smooth embedding of the minimal homeomorphism of Gottschalk and Hedlund，研究集会「多様体の平面場と微分同相群 2011 研究集会」，2011 年 11 月 2 日，「東京大学玉原国際セミナーハウス（群馬県沼田市）」

〔その他〕
ホームページ等
http://www.gem.aoyama.ac.jp/~nakayama/

６．研究組織
(1)研究代表者
中山　裕道（NAKAYAMA, Hiromichi）
青山学院大学・理工学部・教授
研究者番号：30227970

(2)研究分担者
　なし