様　式　C－１９、F－１９、Z－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

# 科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成　２７　年　　６　月　１１　日現在

機関番号：３４３１０
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2011～2014
課題番号：２３５４０１１４
研究課題名（和文）巾零幾何と巾零解析の展開Ⅱ

研究課題名（英文）Development of nilpotent geometry and nilpotent analysis II

研究代表者
森本　徹（Morimoto, Tohru）

同志社大学・研究開発推進機構・嘱託研究員

研究者番号：８００２５４６０

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,500,000円

研究成果の概要（和文）：巾零幾何と巾零解析を展開していく中でその理論を基礎にして「線形微分方程式に対するKlein-Cartan プログラム」を構想し，その理論構築を進めてきた．そして現在それは「幾何(内在的幾何と外在的幾何)と微分方程式（線形と非線形）に対するKlein-Cartan プログラム」へとさらに拡大しより統一的な理論へと発展しつつある.

研究成果の概要（英文）：In the course of developing nilpotent geometry and nilpotent analysis, we proposed a Klein-Cartan programme for systems of linear differential equations and have established a general framework to carry it out. We are now trying to establish a much more general framework to treat a Klein-Cartan programme for geometries (intrinsic and extrinsic) and differential equations (linear and non-linear).

研究分野：幾何学

キーワード：巾零幾何　巾零解析　内在的幾何　外在的幾何　微分方程式系　不変量　Klein-Cartan programme

**１．研究開始当初の背景**

Sophus Lie が連続群 (今日のリー群)の概念を見出しその理論を展開した第１の動機は，群を基礎にして微分方程式の解法理論を建設することであったと言われている．Lie と Felix Klein はそれまでの様々な幾何を群の等質空間として統一的に捉える見方を提案した(Erlangen Programme). Elie Cartan は Espace généralisé の概念を創案し等質空間に留まらずそれをモデルとした曲がった空間（カルタン接続を持つ空間）を考察し，等質でない幾何も含めた一層広い範囲の幾何を群を通して統一的に捉える道を拓いた．Cartan の思想は田中昇の導入した巾零幾何の方法により確固とした基礎と巾広い応用を得た．この観点に立てば，推移的な階数付きリー環 $\mathfrak{g}=\Sigma\mathfrak{g}_p$ が Klein 幾何の代数的モデルであり，これをモデルとしたカルタン接続を持つ主ファイバー束が espace généralisé であり，様々な $\mathfrak{g}$ に対して様々なカルタン幾何が考えられるのであり，内在的幾何の研究に極めて重要な役割を演じる．

本研究代表者は巾零幾何の理論をさらに発展させると同時に，他方で重み付きジェット束の概念を導入しそれを基にして巾零解析の道を拓き，巾零幾何と巾零解析を展開してきた．

**２．研究の目的**

巾零幾何と巾零解析を展開する中で，線形微分方程式系の Klein モデルと Cartan 変形の概念に導かれ，それを通して微分方程式を統一的に理解する道筋を見つけた（線形微分方程式に対する Klein-Cartan programme）. そしてその方向で基礎的な考察を進めてきたが，それらをまとまった理論として確立すること，そしてその理論を一層統一的な理論へと発展させると同時に様々な応用を図ることが本研究の主な目的である．

**３．研究の方法**

巾零幾何と巾零解析を中心として，本研究組織の研究者はもとより，関連する内外の研究者と研究交流や研究討論を行い本研究の遂行に努めた．研究代表者に直接関わる主なものについて以下に記す．

(1) 2011 年 9 月 Australia National University（Canberra）での国際研究集会 The geometryof differential equations に招かれ講演する．M. Eastwood, R. Bryant, A. Cap らと研究交流を持つ．特に B. Doubrov とは共同研究を進め, また若い研究者 K. Neusser, D. The らとも交流を深めた．続いて Wollongong でのオーストラリア数学会の年会に参加し講演した．

(2) 2012 年 1 月韓国高等研究所(KIAS) の Jun-Muk Hwang の来訪を受け, 巾零幾何の複素代数幾何への応用について討議した．

(3) 2013 年 3 月 Potsdam での国際研究集会 Geometric and singular analysis に招待され講演し，従来の解析系の人たちにも巾零解析が広がるよう努める．

続いて München， Grnoble を訪ね，Dorfmeister, Koszul, Malgrange, Gasqui と巾零幾何・解析を巡り様々な話題について論じ話しあう．

(4) 2013 年 6 月 Bergen での Norweigian Summer School on Analysi and Geometry に招待され連続講演を行い，ヨーロッパの若い研究者たちに，巾零幾何・解析の浸透を図る．また Rifford らとサブリーマン幾何について議論する．

(5) 2013 年 8 月 Brno での国際研究集会 Differential Geometry and its Applications に招かれ J. Slovak, V. Lychagin, D. Alexeevskii, I. Zelenko ら研究分野の交わる数多くの研究者と討議する．特に Doubrov とは共同研究を進める．

続いて企画されたサブリーマン幾何についての研究会でサブリーマン構造の曲率について講演し, その講演を巡って Y .Sachkov, D. Alexeevkii, A. Medvedef と議論する．

(6) 2014 年 4 月 M. Godoy Molina(Bergen) の来訪を受け pseudo H type algebra の延長について Bergen 学派と共同研究を開始する．

(7) 2014 年 6 月 Banach Center での国際研究集会 Vector distributions and related geometries に招待され講演する．Bryant, P. Nurovsky をはじめ多くの研究者と交流を深め，また Doubrov と共同研究を進める．

(8) 2014 年 8 月 Sachkov（Russian Acad.）の来訪を受け奈良で研究集会を開き，サブリーマン幾何を中心テーマとして日本側は本研究組織がロシア側は Agrachev, Sachkov が核となり日露数学交流プロジェクトを進める協議をした．

(9) 2014 年 12 月 Institut Henri Poincaré の国際研究集会に招待され講演する．巾零幾何と巾零解析のこれまでの発展をサーベイし今後の課題を述べそれぞれの課題において 4 つの問題を提起した．B. Malgrange, A. Agrachev, I. Zelenko, R. Montgomery，J-M. Hwang，R. Bryant, J-P. Francoise をはじめ旧知の数多くの研究者と再会し巾零幾何とサブリーマン幾何を中心に様々な話題について議論を交わした. また Doubrov とは共同研究を進め，B. Kriglikov ら若い数学者たちとも討議した．

**４．研究成果**

次の発見が本研究の出発点である：微分方程式系の元素と見なすべきものは，推移的な階数付きリー環 $\mathfrak{g}=\Sigma\mathfrak{g}_p$ と階数付き $\mathfrak{g}$-加群 $V=\Sigma V_q$ の組$(\mathfrak{g},V)$である．即ち，そのような組$(\mathfrak{g},V)$に対して $\mathfrak{g}$ 型の幾何構造を持つフィルター付き多様体 $M$ と $M$ 上の $V$ 型の微分方程式系 $R$ の組$(M,R)$を考えることができそのような組全体のなす集合 $D(\mathfrak{g},V)$が決まる. そして $D(\mathfrak{g},V)$の中に局所同型を除いてただ一

つ典型的な微分方程式系($M^0,R^0$)が存在する．これを(g,V)型の Klein 典型，他を(g,V)型の Cartan 変形と呼ぶ．

基本的な(g,V)たちに対して D(g,V) を詳しく調べ，そしてそれらの合成と分解を通して微分方程式の鳥瞰図を作ろうというのが微分方程式に対する Klein-Cartan プログラムである．

他方，推移的な階数付きリー環ｇと階数付き g-加群 V の組(g,V)に対して旗多様体 Flag(V)の部分多様体(M,f)でＭはｇ型のフィルター付き多様体，ｆは(g,V)型の接触列を持つＭから Flag(V)へのはめ込みとなるもの全体 ExtGeo(g,V)が決まる．そして ExtGeo(g,V)と ILD(g,V) は圏同型となるのである．ここで ILD(g,V)は D(g,V)に属する可積分な線形微分方程式系の全体である．従って可積分な線形微分方程式系に対する Klein-Cartan プログラムは旗多様体の外在的幾何に対するそれと同型である．

この方向で次の基本的な結果を得ている：

(1) ｇが単純リー環でＶが既約ならば，ILD(g,V)から Car(g,V)への圏同型が構成できる．ここで Car(g,V)は次のような三つ組(P,M,ω)全体の成す圏；Ｍ はｇ型のフィルター付き多様体，Ｐは M 上の主束でその構造群 $F^0G'$はｇから一定の方法で決まるもの，そしてωはgl(V)に値をとるＰ上の１次微分形式で然るべき条件を満たすものである．

(2) Car(g,V)の各元(P,M,ω)に対して構造関数γが定義される．γはＰ上のベクトル値関数でｇから一定の方法で決まるコホモロジー群 $H^1(g\_,g\sim)_+$ にその値をとる．そして Car(g,V)に属する二つの $P_1$ と $P_2$ が局所同型となるための必要十分条件はそれぞれの構造関数$\gamma_1$と$\gamma_2$が対応し合うことである．

このようにしてｇが単純でＶが既約のとき ILD(g,V)および ExtGeo(g,V)の同値問題を解く一般的な方法がえられる．この結果は Boris Doubrov と待田芳徳との共著論文として纏めているが，その後の発展も書き加えることを考えまだ発表していない．

さらに続いて次の結果を得た：

(3) (g,V)が単純既約のとき Kostant の方法を用いてコホモロジー群 $H^1(g_,g\sim)_+$を計算し，多くのｇに対してそのコホモロジー群が消えていることを示しコホモロジー群が自明とならないようなｇを決定した．

(4)上記のコホモロジー群が自明でない低次元の興味ある例としてｇが sl(3)の場合に ExtGeo(g,V)を詳しく調べた．

一つの応用として旗多様体の部分多様体に関する様々な剛性定理を統一的に得た．

これらに続き次の研究を進めた：

(5) D(g,V)の非線形微分方程式としての同値問題を定式化し (g,V) が単純既約のときその同値問題の解法を考え，大体の見通しを得たが，関連して考察しなければならない問題も沢山ある．

(6) 各(g,V)にっ対してｇ型の内在的幾何と(g,V)型の外在的幾何の間にはガウスの大定理に見られるような緊密な関係が隠されているように見える．そしてその関係は微分方程式における非線形と線形の関係と類似のところがある．これらの関係を具体的な(g, V)に対して調べているが，まだ十分な解明には至っていない．

(7) 旗多様体の分多様体に関する外在的幾何は SL(V)型の外在幾何である．これについては理論的にかなりよく分ったといえるが，これをさらに SL 以外の群に関する外在的幾何にも拡張し，様々な外在的幾何に貫く共通の原理を明らかにしより統一的な外在的幾何の理論を展開することはこれからの課題である．

このように Klein-Cartan プログラムは内在的幾何，旗多様体の外在的幾何および線形微分方程式系に対して良く進められてきたが，さらに大きな視野の下で幾何と微分方程式に対する Klein -Cartan プログラムとして相互に緊密に関連させながら研究を進めていくことはこれからの大きな課題である．

また，巾零幾何・巾零解析のサブリーマン幾何への応用をいくつかの方向から進めている：

(8) サブリーマン多様体の曲率は研究代表者により始めて一般的に定義されたが，具体例においてこの曲率をきちっと計算することは有用であり，Alexeevskii と Medvedef により積極的に試みられている．

(9) 特別な対称性を持ったサブリーマン空間の代数的モデルとして考えられた pseudo H-type algebra が近年解析系の人たちの注意を惹き古谷賢朗と I. Markina (Bergen)は詳しい研究を進めている．Bergen の若い研究者 M.G. Molina の来日を機に，これに巾零幾何の視点から光を当て，共同研究を開始し，最近いくつかの面白い結果を得ている．

## ５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　　６件）


① G. Ishikawa, Y. Machida, M. Takahashi, Geometry of D_4 conformal triality and singularities of tangent surfaces, in Proc. of Singularities in Geometry and Appl. III, Edinburgh, Scotland, 2013, Journal of Singularities, vol. 12 (2015), 27--52. DOI: 10.5427/jsing.2015.12c　査読有

② K.Aomoto, Y. Machida,Double filtration of twisted logarithmic complex and Gauss-Manin connection,J.Math.Soc.Japan, 67-2 (2015) 609-636. 査読有

③ G. Ishikawa, Y. Kitagawa, W. Yukuno, Duality of singular paths for (2,3,5) distributions, Journal of Dynamical and

Control Systems, vol. 21 (2015), 155--171.
DOI: 10.1007/s10883-014-9216-9　査読有

④ K. Furutani, I. Markina, Existence of the lattice on general H-type groups, Journal of Lie Theory, 24, No. 4, 979--1011 (2014). 査読有

⑤ W. Bauer and K. Furutani and C. Iwasaki, Trivializable sub-Riemannian structures on spheres, Journal : Bulletin des Sciences Math\'ematiques, 137, 361–385 (2013). 査読有

⑥ Y. Agaoka, Triangle centers defi-ned by quadratic polynomials, Math. J. Okayama Univ. Vol.53, (2011, January), pp.185-216. 査読有

〔学会発表〕（計　12件）

① T. Morimoto, Generalized H-algebras and their prolongations, 2015年5月14日, 2015 Joint Workshop: Geometry and Analysis at Noda, 2015, 5, 14 - 15,東京理科大学

② T. Morimoto, Equivalence problems of geometric structures and applications to differential equations and subriemannian geometries, December 10, 2014, Workshop << Equivalence, invariants, and symmetries of vector distributions and related structures: from Cartan to Tanak and beyond >> December 10 - 12, 2014, Institut Henri Poincar\'e, Paris

③ 塚本千秋, 2014年10月9日広島幾何学研究会 2014（広島大学）「球面の共形的ツォル変形」

④ T. Morimoto, Klein-Cartan programme for differential equations, June 3, 2014, Banach CenterWorkshop"Vector distributi I ons and Related Geometries" June 2 - 6, 2014, Warsaw.

⑤ T. Morimoto, The Cartan connection associated to a subriemannian structure, 29 August 2013, Geometric control, sub-Riemannian geometry, and their applications, University of Bruno, Czech Republic.

⑥ T. Morimoto, Introduction to nilpotent analysis - Weightedly involutive systems on filtered manifolds, 24 and 27 June, 2013, Norvergian Summer School on Analysis and Geometry, University of Bergen, Norway, 24 - 28 June, 2013.

⑦ T. Morimoto, A Klein Cartan programme for differential equations and extrinsic geometries in flag manifolds,
5 April, 2013, Seminar in Geometry, Institut Fourier, University of Grenoble.

⑧ T. Morimoto, Nilpotent analysis on filtered manifolds, 25 March, 2013, Geometric and singular analysis,
University of Potsdam am Neuen Palais, 25 - 29 March, 2013

⑨ 阿賀岡芳夫，テンソル空間における不変部分多様体とその幾何学的応用，幾何学コロキウム， 北海道大学，2012年11月9日

⑩ 塚本千秋, 2012年3月30日近畿大学数学教室講演会「実グラスマン型の分岐則とその安定性」

⑪ T. Morimoto, Subriemannian curvatures, 55th Annual Meeting of the Australian Mathematical Society (26 - 29 September, 2011), University of Wollongong, 27 September, 2011.

⑫ T. Morimoto, Differential equations on filtered manifolds: Invitation to nilpotent analysis, AMSI supported Workshop "The Geometry of Differential Equations, 18-23 September, 2011", Australian National University, Canberra, September 22, 2011.

〔図書〕（計１件）
倉西正武, 藤木明, 森本徹(7番目) 他11名, 倉西数学への誘い, 98-116, 岩波書店, 2013年12月13日

〔産業財産権〕
○出願状況（計　　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計　　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
取得年月日：

国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織
(1)研究代表者
森本　徹（MORIMOTO TOHRU）
同志社大学・研究開発推進機構・嘱託研究員
研究者番号：80025460

(2)研究分担者
(　　　)

研究者番号：

(3)連携研究者
石川　剛郎（ISHIKAWA GOO）
北海道大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：50176161

古谷　賢朗（FURUTANI KENRO）
東京理科大学・理工学部・教授
研究者番号：70112901

待田　芳徳（MACHIDA YOSHINORI）
沼津工業高等専門学校・嘱託教授
研究者番号：90141895

塚本　千秋（TSUKAMOTO CHIAKI）
京都工芸業繊維大学・工芸科学研究科・教授
研究者番号：80155340

阿賀岡　芳夫（AGAOKA YOSHIO）
広島大学・総合科学部・教授
研究者番号：50192894