

**科学研究費助成事業 研究成果報告書**

平成 27 年 6 月 4 日現在

機関番号：12301

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2011～2014

課題番号：23540121

研究課題名(和文)再生核理論の応用と工学的問題への新展開

研究課題名(英文)Applications of Reproducing kernel theory and its new development in engineering

研究代表者

松浦 勉(Matsuura, Tsutomu)

群馬大学・大学院理工学府・准教授

研究者番号：80181692

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,800,000円

研究成果の概要(和文)：我々の開発した、再生核理論とチホノフの正則化理論の融合理論をもちいて、いくつかの逆問題に挑戦し、具体的な解の計算アルゴリズムを構築し、その有用性を確認した。

具体的には、波動方程式の逆問題の解の陽的表現、任意境界が与えられた場合のディリクレ問題の解公式の導出、複素ガボルウェーブレット変換を利用した混合信号の復元問題、ポアソン方程式の近似解の構成アルゴリズムの有効性の確認、正則方程式を数値的に解く新しい離散化法の提案、熱伝導問題の逆問題に関して再生核空間の拡張問題などを扱い、成果を上げた。

研究成果の概要(英文)：We developed a new type of Tikhonov regularization combined with the theory of reproducing kernels. Using our method of regularization we have challenged some famous and historically difficult inverse problems. Furthermore we constructed concrete algorithms for solving those problems and confirmed their effectiveness by numerical experiments.

In practice, we have studied the following problems: 1) explicit solution of inverse problem in wave equation, 2) solution of Dirichlet problem with arbitrary boundary shape, 3) new discretization method for solving regularized integral equation, 4) method for separating and extracting mixed signal with complex Gabor wavelet transform, 5) validity of our algorithm for constructing of approximate solution of Poisson equation, 6) expansion of reproducing kernel space for inverse problem of heat conduction.

研究分野：数理工学

キーワード：再生核 逆問題 離散化 正則化 積分変換 アルゴリズム 数値計算

## 1. 研究開始当初の背景

(1) この数年来我々は再生核理論の展開と応用について研究を続けている。この研究では計算機全盛以前のような抽象的なものではなく、具体的、構成的、さらに可能ならば計算機を意識した実用的なものを目指している。特に逆問題の解構成の手法として再生核理論を適用し、逆問題の解の具体的な表現を得ること、計算アルゴリズムを確立することを目標としている。本申請課題は我々のこれまでの(数学としては非常に具体的な)研究成果をさらに工学的(実用的)なレベル、具体的な問題レベルにまで展開して、工学、医学、産業界等に寄与することを目的としており、ここ十年来の我々の再生核理論・応用研究の集大成と位置づけられるものである。

(2) 齋藤(研究分担者)は、スタンフォード大学流の具体的な再生核の理論をはじめとして一般論や応用に関する再生核の理論の広い分野を研究テーマとし、ここ40年近く一貫して研究を行ってきた。その関連論文は130編を超え、英文研究著書も2冊出版し、再生核理論の専門家として国際的に活躍しており、Applicable Analysis など15を超える国際雑誌の編集委員も務めている。しかしながら具体的な問題へのアプローチに関しては、計算アルゴリズム構築の困難などが障害となり、少数の例を扱っただけであった。そのようなとき、8年ほど前より松浦(研究代表者)が共同研究に加わり、具体的な逆問題から理論の精密化を図るとともに、現実的な計算アルゴリズムの構築を目指すこととなった。その経過の中で、特異性を回避しながら漸近的に真の解に近づくチホノフの正則化法と再生核理論の統合を思い立った。

(3) 松浦(代表研究者)は学生時代より、数理工学を専攻し、甘利俊一教授(東大名誉教授、現在は理化学研究所、脳科学統合研究センター・脳数理研究チーム・チームリーダー)のもとで、神経回路網の数理や統計的学習理論、非線形最適化問題、パターン認識、サポートベクタマシン、独立成分分析などに関する研究を行ってきた。これらの分野ではチホノフの正則化法は(関数解析との関連は意識されていないが)強力な手法として認知されており、この経験を踏まえて両者(チホノフの正則化法と再生核理論)の統合を思い立った次第である。それ以降、我々はこの立場から具体的な問題への精力的なアプローチを始めることとなった。

(4) その後、我々は歴史的に難問とされてきた熱伝導における逆問題について、この方法を適用し、新しい陽表現公式を確立した。さらに我々は、得られた逆公式を用いて、任意時刻に任意温度分布を実現する初期温度分布を算定するアルゴリズムを開発し、コンピュータによる数値実験を行い、この方法とアルゴリズムの妥当性を確認することに成功した。そしてその成果をISAAC(International Society for Analysis, its Applications and Computation)の第4回国際会議(2003年8月、トロント)にて報告した。

(5) さらに、我々は上記研究を通して得られた方法論を拡張・適用することによって、それまで逆問題として具体的に解くことは困難とされてきた、様々な逆問題に応用し、有用な解法を見出してきた。

## 2. 研究の目的

(1) コンピュータビジョン、信号処理工学、ロボットアーム解析、複雑境界条件を持つ医用工学のデータ解析などの分野において、重要であるが解くことが困難とされ放置されている逆問題を、我々の理論の立場から再整理して定式化を行う。

(2) 上記で定式化された問題に対して我々の方法を用いて解の構成アルゴリズムを開発・構築する。

(3) これまでに得られた我々の方法による種々の逆問題の解構成法と、従来の差分法、有限要素法、境界要素法などによる解法とを比較し、高精度計算においても我々の方法が様々な点で優位であることを実証する。

(4) 上記(2)で得られた逆問題の解構成法を現場の普通の計算機でも簡単に使用できるようにユニット化して、工業、産業、医療等の現場に提案する。可能ならば特許出願して特許取得を目指す。

## 3. 研究の方法

(1) チホノフ正則化法と再生核理論を結びつけ、具体的に計算可能な逆問題の解公式を導いたうえ、数値実験でその有用性を検証する。

(2) いくつかの逆問題に適する解構成のアルゴリズムを構築する。我々の方法論は逆問

題に対してある種の汎用性を持つものであるが、具体的な問題を解く際にはその問題特有の困難さが伴うことが普通であり、それらのノウハウがそのまま通用するとは限らないと思われる。この場合には新しいアルゴリズムを見出すことに努める。現場のデータは一般的に測定誤差等の誤差を伴うものであるから、構築したアルゴリズムの誤差解析も並行して行う。さらに計算機を用いて詳細な数値実験を行ない、アルゴリズムの有用性を検証する。

(3) この研究課題で取り上げる工学や医用工学の課題については、従来より(不十分ながら)一応の解析方法が存在する。これらの方法で得られる結果と我々の方法で得られる結果を、計算時間、計算経済性、誤差、分解能、解像度等、種々の観点からの比較検討を行う。

#### 4. 研究成果

(1) 混合信号の分離再生問題を逆問題の一つとして扱った。この問題には、信号源の統計的独立性を利用する「独立成分分析」も開発されてきたが、この手法は事前に元の信号源の種類数がわかっていることが前提となっている。そこで、複素ウェーブレット関数を用いて元信号の種類数も同時に求めることができる方法を開発した。この方法は混合信号の複素ウェーブレット変換(主にガボール変換を用いた)の商を、各時間、各周波数毎に(離散点上で)求め、その値が実数に近いものになった場合は、その時間・周波数において(混合信号においても)元の信号が卓越しているはずであり、同じ元信号が卓越している時間・周波数においては、上記の商が同一の実数を取る、という数理的性質を利用している。また、この方法で得られた実数値(これは、元信号の種類数に対応する異なる実数が得られるはずである)から、元信号から混合信号を生成した混合行列も推定することができる。よって推定された混合行列を用いて、元信号を再生することが可能となる。

(2) ポアソン方程式の近似解の校正アルゴリズムの有効性の確認、波動方程式の逆問題の解構成アルゴリズムの有効性の確認をおこなった。

(3) 再生核理論とチホノフ正則化を用いて波動方程式の逆問題の解の陽的表現の導出に成功した。また、この表現の理論的な誤差

解析もおこなった。さらに、この解表現の妥当性を詳細な数値計算により検証した。

(4) 再生核理論を用いて任意境界が与えられた場合のディリクレ問題の解の公式を導出する研究をおこなった。この結果は第9回 ISAAC Congress において発表した。この研究はディリクレ問題を従来のように円周などの簡単な境界形状のみならず、現実的な複雑な境界形状にたいして具体的・効率的に計算可能な方法を示したものであり、学会においては具体的な調和関数について実例をいくつか取り上げ、その有用性を示したところ、ディリクレ問題の適用範囲が大きく広がったとの高評価を得た。

(5) 熱伝導問題の逆問題に関して派生したものであるが、逆問題の解を構成するために、2次フーリエ変換を考え、2次式の係数パラメータに対応する許容解空間を定め、その解空間における再生核によって解を構成する方法を考えた。この研究では、係数パラメータに依存して6種類の解空間を考へることが判明し、初期条件の性質によって空間を適切に選ぶことにより解の特性を容易に論じることが可能となった。

(6) 「アベイロ離散化法」を考案し、再生核との関連、逆問題への適用方法、非線形システム同定問題への応用、非線形パターン分類の強力な手法であるサポートベクタマシンとの関係等を考察した。さらにこの研究によって、チホノフ正則化による有界線形作用素方程式の解の構成に我々の離散化法をどのように適用すればよいかも判明し、具体的な問題に(特に以前大きな成果を上げたラプラス実逆変換問題などに)応用して、その有用性を明らかにした。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 10件)

Tsutomu Matsuura, Saburo Saitoh, Inversion Formulas and Numerical Experiments in the Wave Equation by reproducing kernels and Tikhonov Regularization, Progress in Analysis, 査読有, 2012, Vol.1, 282-289.

Tsutomu Matsuura, Saburo Saitoh,

Approximate Solutions for the Poisson Equation by Using the Theory of Reproducing Kernels, Journal of the Japan Society of Applied Electromagnetics and Mechanics, 査読有, Vol.19, 2011, 183-188, <http://ci.nii.ac.jp/naid/110008904252>

T. Matsuura, A. Faiz and K. Kiryu, Blind Source Separation of Mixed Images Using 2-D Complex Wavelet Transform, Journal of the Japan Society of Applied Electromagnetics and Mechanics, 査読有, Vol.19, 2011, 234-239, <http://ci.nii.ac.jp/naid/110008904263>.

Tsutomu Matsuura, Saburo Saitoh, Dirichlet's Problem by Using Computers with the Theory of Reproducing Kernels, Current Trends in Analysis and Its Applications, 査読有, 2015, 561-568, DOI:10.1007/978-3-319-12577-0\_62.

Saburo Saitoh, Generalized Inversions of Hadamard and Tensor Products for Matrices, Advances in Linear Algebra & Matrix Theory, 査読有, Vol.4, 2014, 87-95, <http://dx.doi.org/10.4236/alamt.2014.42006>.

L. P. Castro, M. M. Rodrigues, S. Saitoh, A Fundamental Theorem on Initial Value Problems by Using the Theory of Reproducing Kernels, Complex Anal. Oper. Theory, 査読有, Vol.9, 2015, 87-98, DOI 10.1007/s11785-014-0375-1.

L.P.Castro, M.R. Haque, M.M. Murshed, S. Saitoh, N.M. Tuan, Quadratic Fourier transforms, Ann. Funct. Anal., 査読有, Vol.5, 2014, 10-23, [http://www.emis.de/journals/AFA/AFA-text\\_v5\\_n1\\_a2.pdf](http://www.emis.de/journals/AFA/AFA-text_v5_n1_a2.pdf).

H. Fujiwara, M.M. Rodrigues, S. Saitoh, V.K. Tuan, A new discretization principle in analysis, Int. J. Math. Comput., 査読有, Vol.22, 2014, 75-88, <http://www.ceser.in/ceserp/index.php/ijmc/article/view/2595/2903>.

L. P. Castro, A. S. Silva and S. Saitoh, A reproducing kernel Hilbert space

constructive approximation for integral equations with Toeplitz and Hankel kernels, Libertas Mathematica (new series), 査読有, Vol.34, 2014, 1-22, <http://ara-as.org/index.php/lm-ns/article/download/1205/1141>.

Castro, L. P., Rojas, E. M, Saitoh, S., Tuan, N. M., Tuan, P. D., Solvability of singular integral equations with rotations and degenerate kernels in the vanishing coefficient case, Anal. Appl., 査読有, Vol.13, 2015, 1-22, DOI:10.1142/S0219530514500468.

〔学会発表〕(計 4件)

T. Matsuura, Applications of Tikhonov regularization with reproducing kernels to some inverse problems and their numerical experiments, International Society for Analysis, its Applications and Computation, 2011年8月25日, モスクワ, ロシア.

松浦勉, 再生核理論とその応用, 平成25年度数学・数理科学と諸科学・産業との連携ワークショップ(招待講演), 2013年11月22日~23日, 大阪教育大学天王寺キャンパス.

Tsutomu Matsuura, Dirichlet's Problem by Using Computers with the Theory of Reproducing Kernels, The 9th International ISAAC (International Society for Analysis, its Applications and Computation) congress, 2013年8月5日~9日, クラコフ, ポーランド.

Saburo Saitoh, Delicate inequalities for the Tikhonov extremal functions, The Conference on Inequalities and Applications '14 (招待講演), 2014年9月7日~13日, Hotel Aurum, Hajdszoboszl, Hungary.

〔図書〕(計 2件)

L.P. Castro, H. Fujiwara, M.M. Rodrigues, S. Saitoh and V.K. Tuan, Springer, Mathematics Without Boundary Survey in Pure Mathematics, 2014, 781(37-92).

L.P. Castro, H. Fujiwara, T. Qian and S. Saitoh, Springer, Mathematics Without

Boundary Survey in Interdisciplinary  
Research, 2014, 648(101-116).

6 . 研究組織

(1)研究代表者

松浦 勉 (MATSUURA, Tsutomu)  
群馬大学・大学院理工学府・准教授  
研究者番号：8 0 1 8 1 6 9 2

(2)研究分担者

齋藤 三郎 (SAITOH, Saburou)  
群馬大学・名誉教授  
研究者番号：1 0 1 1 0 3 9 7