

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 4 月 17 日現在

機関番号：14401

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2011～2013

課題番号：23540133

研究課題名(和文)大偏差制御に関する研究

研究課題名(英文)Study on Large Deviations Control

研究代表者

関根 順 (Sekine, Jun)

大阪大学・基礎工学研究科・教授

研究者番号：50314399

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,300,000円、(間接経費) 990,000円

研究成果の概要(和文)：長期間最適投資問題をその”双対”問題にあたる大偏差下方確率最小化問題と関連付けて研究し、以下の研究成果を挙げた：(i)フロア制約を設けた問題について最適解の特徴付けと具体的構成法(計5種類)の提示を行った。(ii)一般化したドローダウン制約を設けた問題の最適解の構成を行った。フロア+ドローダウン制約問題も取り扱った。(iii)最適解の明示的計算が可能となる新たな例としてWishart型ファクターモデルの提案と計算を行った。(iv)双対法を用いた大偏差確率最小化問題への別アプローチを提示した。更に、鞍点法を用いた裾確率の近似公式：Lugannani-Rice公式の理論的結果を得た。

研究成果の概要(英文)：Long-term optimal investment problems and related large deviation control problems are studied, and the following results are obtained:(i) For the floor constrained problem, a characterization of optimal solution is presented and the construction methods (in five ways) of optimal solution is provided. (ii) Optimal solution is constructed for the generalized drawdown constrained problem. Moreover, the problem with both floor and drawdown constraint is treated. (iii) As a tractable and computable example, Wishart factor model is presented and studied. (iv) A different approach to large deviation control problem via duality is explored. Also, a theoretical order estimate is obtained for the Lugannani-Rice formula, which is the approximation formula for the tail probability, based on the saddle-point approximation technique.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学一般

キーワード：long term investment downside risk floor constraint drawdown constraint Wishart factor model Lugannani Rice formula

1. 研究開始当初の背景

数理ファイナンス分野の長期間動的最適化問題から興った大偏差確率を制御する研究は、“双対問題”にあたるリスク鋭感的制御に関する新たな関心を喚起していた。のみならず、大偏差理論の数理ファイナンス・確率制御理論への新たな応用の可能性が示唆されている状況であった。一方、ファイナンス理論や金融実務（例えば年金資産運用など）への応用の見地から見て、長期間の資産運用で下方リスクをコントロールしながら最適な成長を実現する運用を行うことは、重要な課題であった（現在も引き続き）。

2. 研究の目的

上記の背景を念頭に、長期間動的最適投資・消費問題を以下の設定下で解析することを目的とする。

- (1) “下方リスク”に関する制約を設けて最適化問題を解く。
- (2) リスク回避極限をとって、リスクを可能な限り回避するような漸近的に最適な投資戦略を解析する。
- (3) モデルの不確定性を加味して最適化問題の解析を行う。
- (4) 大規模な動的最適化問題を明示的に解くことは一般には困難である。最適解の明示的計算がある程度可能になるような、なるべく多様な特徴を持ったマーケットモデルの例の提示を行う。

更に、関連した問題・課題を、長期間動的最適化問題に限らず研究する。

3. 研究の方法

- (1) フロアー制約やドロウダウン制約など富過程に制約を設けて、直接下方リスクを制限した下で最適化問題を解く方法を研究する。漸近的指標関数を持つ長時間動的最適化問題の場合は、問題が単純化されるため解析がし易くなることが予想される。この研究の後に、有限期間での動的最適化問題の解析に取り掛かる。
- (2) ファクターモデルのノイズパラメータとリスク回避度パラメータについて“small noise & large risk-averse limit”を採用することで、Freidlin-Wentzell型大偏差理論を適用して微分ゲームを導出できる。ゲームの鞍点から得られるフィードバック型投資戦略はロバストで“漸近的”に最適と予想される。
- (3) 資産価格過程のパラメータが直接観測できない確率変数であるような市場モデルを採用して部分情報下で長期間動的最適化問題を解析する。
- (4) Affine型確率過程をファクターに持つような市場モデルは多様性を持ち、またリスク鋭感的ポートフォリオ最適化問題と相性が良い。このクラスの中で市場モデルを構成し、長期間動的最適化問題の解析を行う。
- (5) 有限期間の確率最大化・最小化問題（いわゆる quantile hedging 問題）の解析結

果から直接長時間極限を採って大偏差制御の解を得るアプローチについて考察を進める。

- (6) 裾確率の近似的計算手法に活かされている大偏差理論の応用の一般化、精緻化を試みる。

4. 研究成果

- (1) 長期間動的最適投資問題と「双対」問題にあたる大偏差確率最大化・最小化問題について以下の成果を挙げた：

フロアー制約付き問題を取扱い、最適解の特徴付けを行った。更に具体的な最適解構成法を計5手法提示した。その中では、金融実務の世界でフロアーに制約を設けて行う運用手法（いわゆるポートフォリオインシュランス手法）と動的最適化手法を組み合わせ、理論的にも応用的にも興味深い投資戦略が構成され、興味深い貢献と考えられる。主結果をまとめた論文は、数理ファイナンス分野での国際的一流雑誌 Finance and Stochastics に掲載された。有限期間での最適投資・消費問題をフロアー制約下で解析することが次の重要な研究課題となるが、完備市場などのいくつかの限定的条件下ではこの取り扱いに成功している。（Salvatore Federico 氏, Fausto Gozzi 氏との共同研究）

一般化されたドロウダウン制約付き問題の取り扱い、最適解の構成に成功した。更に、フロアー+ドロウダウン制約付きの問題も取り扱った。既存研究では、線形ドロウダウン制約の取り扱いしか行われていなかった。非線形なドロウダウン制約を取り扱うことで、資産運用実務のパフォーマンス評価で用いられているドロウダウンに基づいた指標と関連付けることが可能となった。主結果は数理ファイナンス分野での国際的一流雑誌 SIAM Journal on Financial Mathematics に掲載された。割引率を任意に採ってドロウダウン制約問題を解析すること、最適投資・消費問題をドロウダウン制約下で解析することが次の課題である。

畑宏明氏との共同研究を通して、最適解の明示解が得られるような新たな例として Wishart 型ファクターモデルを提示した。Wishart 型ファクターモデルは資産の分散行列を直接的に Wishart 型自己相関過程でモデル化し、更に金利や期待収益率項も Wishart 型ファクター過程のアフィン関数で表現する多様で柔軟な市場モデルである。その上リスク鋭感的ポートフォリオ最適化問題の解析に於いてはいわゆる LEQG 型 (Linear-Exponential-Quadratic-Gaussian) 制御と類似性の高い構造を持つので明示的最適解の表示が可能になる興味深い例である。現在、Wishart 型拡散過程ファクターモデルの研究を一步発展させた飛躍付ファクターモデルを用いた解析を継続中である。

完備市場モデル下で双対法に基づき有限期間確率最大化・最小化問題の最適解を与え、その長時間漸近挙動を直接調べることで

大偏差制御問題の解を得るという別解法を提示した。完備市場に限るが、市場モデルのマルコフ性を必要としないという一般性も持っており興味深い貢献と考えられる。現在も、より精緻な漸近挙動の解析や、中偏差 (moderate deviation) を制御するような最適化問題の解析を継続中である。

(2) 貝瀬秀裕氏との共同研究の中で、ファクターのノイズパラメータとリスク回避度パラメータについて small noise & large risk-averse limit を採り、Freidlin-Wentzell 型大偏差理論を用いて、微分ゲームを導出した。このゲームの鞍点を用いて得られるフィードバック型投資戦略のロバスト性、漸近的最適性を論じた。この漸近的最適投資戦略は1階線形常微分方程式を解くことのみで計算される応用上も取り扱いのし易いものである。

(3) 宮田英明氏との共同研究の中で、期待収益率が直接できない隠れた確率変数であるような市場モデルについて、CRRA 型効用最大化問題を考察し、その長時間漸近挙動を調べた。対数効用よりよりリスク回避的なケースでは、最適効用は期間の長さに関して指数的に増大せず、双曲的な増大度を持つことが示された。更に、この増大度は期待収益率の事前分布には依存しない。このようなモデルについては大偏差のレートが大きく異なっていることが予想される。また経済学で不確実性があるときしばしば採用される双曲的割引率の数学的説明にもなっており、興味深い。

(4) 加藤恭氏、吉川健一氏との共同研究の中で、裾確率の鞍点近似を用いた近似的計算法：Lugannani-Rice 公式に対して、一般的な設定で理論的な近似精度を与えた。この公式は金融実務の現場で理論的な裏付け無しに幅広く応用され、多くの場合、良好な近似精度が報告されてきていたが、これに対する理論的な裏付けを与えたことになる。まだ改善の余地のある結果ではあるが興味深い前進と考えられる。更に、コンピュータシミュレーションから得られた数値計算結果からコンジェクチャーも提示しており興味深い。

(5) 加藤恭氏、山本浩充氏との共同研究で、部分情報下条件付き線形コモディティ価格過程モデルを提示した。モデルは取り扱いやすさと多様性・柔軟性を併せ持ち興味深い。フィルタリングや効用無差別価格の明示的計算を行った。

(6) Hyejin Ku 氏との共同研究を通して、タイムホライズンが有限の離散状態を持つ停止時刻で与えられている効用最大化問題の解法を提示した。更に、効用無差別価格の計算法を提示した。動的最適化とマルチンゲール表現定理を再帰的に用いる点が新しいと考えられる。これは死亡率に連動するペイオフを持つような保険と金融の融合商品の価格付けなどに応用されると考えられ、応用上も興味深い。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計8件)

- (1) Takashi Kato, Jun Sekine, and Hiromitsu Yamamoto. "A one-factor conditionally linear commodity pricing model under partial information". *Asia Pacific Financial Markets* 21(2), 2014, 151-174.
- (2) Jun Sekine, "Long-term optimal investment with a generalized drawdown constraint". *SIAM Journal on Financial Mathematics* 4(1), 2013, 452--473.
- (3) Hiroaki Hata and Jun Sekine, "Risk-sensitive asset management under a Wishart autoregressive factor model", *Journal of Mathematical Finance*, 3(1A), 2013, 222-229.
- (4) Jun Sekine, "On dynamic portfolio insurance techniques". In *Real Option, Ambiguity, Risk and Insurance*, IOS Press, Ebooks Series: Studies in Probability, Optimization, and Statistics, vol. 5, Editors: Alain Bensoussan, Shige Peng, Jaeyoung Sung, 2013, pp. 232-254.
- (5) Hidehiro Kaise and Jun Sekine, "Optimal portfolio for a highly risk-averse investor: a differential game interpretation", *Risk and Decision Analysis*, 3, 2012, 211-222.
- (6) Jun Sekine, "Long-term optimal portfolios with floor", *Finance and Stochastics*, 16(3), 2012, 369-401.
- (7) Hideaki Miyata and Jun Sekine, "Bayesian optimal power-utility grohyperbolically in the long run", *RIMS Kōkyūroku* 1788, "Mathematical Economics", 2012, pp. 62-82.
- (8) Tadashi Hayashi and Jun Sekine, "Risk-sensitive portfolio optimization with two-factor model having a memory effect", *Asia Pacific Financial Markets*, 18(4), 2011, 385-403.

[学会発表](計22件)

- (1) Jun Sekine, "Utility maximization with floor constraint: a dual approach", *International Conference on Portfolio Selection and Asset Pricing*, Kyoto University, Mar. 2014.
- (2) Jun Sekine, "Utility maximization with floor constraint: a dual approach", *Stochastic Processes and Mathematical Finance*, Kansai University, Feb. 2014.
- (3) 関根順, "Wishart 型行列ファクター過

- 程モデルに関する動的ポートフォリオ最適化”，ワークショップ「正定対称行列をめぐるモデリング・数理・アルゴリズムの世界」，政策研究大学院大学，2014年1月。
- (4) 関根順， “Utility maximization with floor constraint”，数理経済学会研究集会「経済の数理解析」，慶應義塾大学，2013年12月。
- (5) Jun Sekine, “Utility maximization with floor constraint”, Stochastic Processes and Their Statistics in Finance in Okinawa, Oct. 2013.
- (6) Jun Sekine, “Utility maximization for a derivative security with discrete stopping time horizon”, 59th World Statistics Congress, Hong-Kong, Aug. 2013.
- (7) 関根順, “Long-term optimal portfolios with drawdown constraint” 京都大学数理解析研究所談話会，2013年6月。
- (8) Jun Sekine, “Long-term optimal investment with drawdown constraint” Seminar on Financial Mathematics, Libera Universita Internazionale Degli Studi Sociali, Roma, May 2013.
- (9) 関根順, “効用最大化に関するサーベイ”，確率論早春セミナー，関西大学，2013年3月。
- (10) Jun Sekine, “Sensitivity analysis for utility maximization via an associated FB-system of SDE”, Workshop on Finance, Stochastics and Asymptotic Analysis, CSFI, Osaka Univ, Feb. 2013.
- (11) Jun Sekine, “An approximation for utility maximization via an associated FB-system of SDE”, The First Asian Quantitative Finance Conference, NUS, Singapore, Jan. 2013.
- (12) Jun Sekine, “An approximation for utility maximization via an associated FBSDE”, Analysis and Control of Stochastic Partial Differential Equations, Shanghai, Fudan University, Dec. 2012.
- (13) 関根順, “非線形富過程を用いた価格付けと期待効用最大化に対する FBSDE アプローチについて” (第二回数理ファイナンス合宿型セミナー，大橋会館，2012年11月。
- (14) Jun Sekine, “Nearly optimal strategies for risk-sensitive portfolio optimization on infinite horizon”, Conference in Honor of Freddy Delbaen, ETH Zürich, Sep. 2012.
- (15) Jun Sekine, "From quantile hedging to large deviations controls in the long run", Seminar in Department of Mathematics of NCU, Taiwan, March 2012.
- (16) Jun Sekine, "On hyperbolic growth of long-term Bayesian optimal power-utility", Workshop on Stochastic Processes and Their Applications, NCTS, Hsinchu, Taiwan, March 2012.
- (17) Jun Sekine, "Long-term optimal investment with a generalized drawdown constraint", Winter Workshop on Finance 2012, Hokkaido University, Feb. 2012.
- (18) 関根順, "長期金利のロバストな表現について", 数理経済学会研究集会「経済の数理解析」，同志社大学，2011年10月。
- (19) 関根順, "Wishart 自己回帰型ファクターモデルを用いた動的ポートフォリオ最適化", 日本応用数理学会 2011 年度年会，同志社大学，2011年9月。
- (20) Jun Sekine, "Long-term optimal portfolios with state constraints", SIAM Conference on Control & Its Applications, Baltimore, July 2011.
- (21) Jun Sekine, "From quantile hedging to large deviations controls with long horizon", APS Conference, KTH, Stockholm, July 2011.
- (22) Jun Sekine, "Long-term optimal portfolios with state constraints", 2nd NTH Workshop on Finance and Insurance Mathematics, Braunschweig, June-July 2011.
- 〔図書〕(計2件)
- (1) 関根順, 「応用数理ハンドブック (数理ファイナンス・動的ヘッジングの項)」(日本応用数理学会監修，朝倉書店，2013)
- (2) 関根順, 「朝倉 数学ハンドブック [応用編] (第 III 編：数理ファイナンス)」(朝倉書店，2011)
- 〔産業財産権〕
出願状況 (計0件)
- 名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：
- 取得状況 (計0件)
- 名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：

国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等

<http://elis.sigmath.es.osaka-u.ac.jp/~sekine/>

6．研究組織

(1)研究代表者

関根 順 (SEKINE, Jun)

大阪大学大学院基礎工学研究科・教授

研究者番号：50314399

(2) 研究分担者

なし

(3)連携研究者

なし