

平成 26 年 5 月 7 日現在

機関番号：16301

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2011～2013

課題番号：23540140

研究課題名(和文) Koebe (1916) による正準スリット領域への数値等角写像

研究課題名(英文) Numerical Conformal Mappings onto the Canonical Slit Domains Listed in Koebe (1916)

研究代表者

天野 要 (AMANO, KANAME)

愛媛大学・理工学研究科・教授

研究者番号：80113512

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,000,000 円、(間接経費) 900,000 円

研究成果の概要(和文)：等角写像は関数論の基本的な問題の一つで、理工学への応用も広い。この研究では、代用電荷法を用いて、非有界な多重連結領域から個々のスリットの斜角を個別に指定した直線スリット領域と螺旋スリット領域への近似写像関数の統合的な構成法を提案し、その有効性を数値実験で検証した。方法の原理は有界領域の問題にも適用可能である。その結果、斜角を個別に指定できるという意味でより一般的な形で、Koebe (1916) の39種の最初の13種の正準スリット領域への簡潔で精度の高い近似写像関数の構成が可能になった。

研究成果の概要(英文)：Conformal mappings are familiar in science and engineering. Using the charge simulation method, we proposed a unified method of numerical conformal mappings of unbounded multiply connected domains onto the linear and the spiral slit canonical domains, where oblique angles of the slits were individually specified, and showed its effectiveness by numerical experiments. The method is applicable also to the problem of bounded domains in principle. As a result, approximate mapping functions onto the first thirteen of the thirty nine canonical slit domains listed in Koebe (1916) are obtainable in a more general form as described above.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・数学一般(含確率論・統計数学)

キーワード：等角写像 正準スリット領域 代用電荷法 基本解 数値複素解析

1. 研究開始当初の背景

等角写像は関数論の基本的な問題の一つで、理工学への応用も広い。しかし、その写像関数を厳密に記述できる場合は限られていて、数値等角写像は計算数学における重要な課題として古くから研究されている。

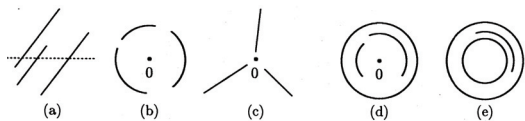


図1 正準スリット領域 (Nehari, 1952)

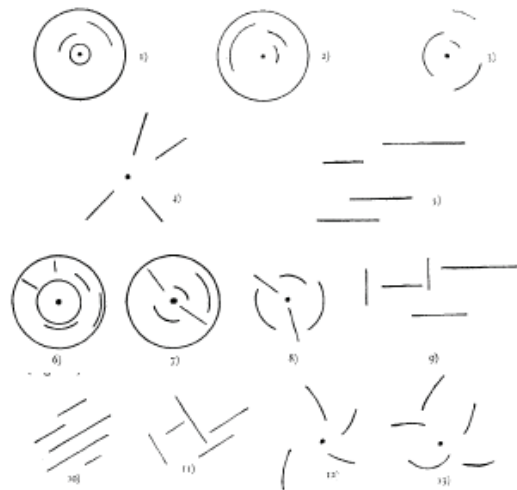


図2 正準スリット領域 (Koebe, 1916)

近年、多重連結領域の問題があらためて注目されている。多重連結領域の等角写像では、単位円板のような単一の標準領域は存在せず、領域の幾何学的な形状に着目した正準領域を設定するという方法がとられる。このような領域として、図1の(a)平行スリット領域、(b)円弧スリット領域、(c)放射スリット領域、(d)円弧スリット円板領域、(e)円弧スリット円環領域が広く知られている(例えば Nehari, 1952)。遡って、Koebe (1916)は39種の正準スリット領域を挙げている。その最初の13種(図2)は上記の(a)~(e)と、直交方向の直線スリットが混在する直交直線スリット領域、円弧スリットと放射スリットが混在する円弧放射スリット領域、螺旋スリット領域、直交螺旋スリット領域等からなる。

一方、代用電荷法はポテンシャル問題の半解析的な数値解法として知られている。2次元 Laplace 方程式の場合には、解である調和関数を対数ポテンシャル(基本解, log 関数)の1次結合で近似して、その未定係数を境界条件が選点的に満たされるように定めるというものである。

研究代表者は1987年、代用電荷法を用いた数値等角写像の方法を提案した。その原理は、等角写像の問題を標準(または正準)領域の幾何学的な形状に着目した境界条件を満たす調和関数とその共役調和関数を求める問題に帰着し、前者に代用電荷法を適用す

れば後者は arg 関数の1次結合として自然に定まるといものである。数値計算上は連立1次方程式を解くだけで表現が簡潔で精度の高い近似写像関数が具体的に求まる。この方法は Riemann 写像に始まり、上記の(a)~(e)の正準スリット領域への問題に適用されて多くの成果が得られていた。

2. 研究の目的

基本的な目的は、代用電荷法を用いて、多重連結領域の様々な等角写像の表現が簡潔で精度の高い近似写像関数の構成法を統合的な形で与えることである。このような近似写像関数は関数論の成果がそのまま適用できるという意味で応用上も重要である。

課題申請の当初に設定した目的は次のとおりである。

(1) Koebe (1916)の最初の13種の正準スリット領域への表現が簡潔で精度の高い近似写像関数の統合的な構成法を与えること。

(2) その成果を等角写像のための数学ソフトウェアとして実装、公開すること。

3. 研究の方法

研究代表者の天野と連携研究者の岡野は愛媛大学で同じ研究室に所属し、電気通信大学の緒方秀教准教授(現在教授, 2005年度前期まで愛媛大学で同じ研究室に所属)、東京大学(現在青山学院大学)の杉原正顕教授とともに代用電荷法と数値等角写像に関する多くの研究を共同で行ってきた。この課題では、これまでの協力関係を維持しながら、目標を絞って天野と岡野で研究組織を構成することにした。

研究の方法は近似写像関数の構成法を提案し、その有効性を数値実験で検証するというものである。次の課題に順次取り組むことにした。

(1) 非有界な多重連結領域から直線スリット領域への近似写像関数の構成法に関する進行中の研究を完成する。

(2) 有界な多重連結領域から円弧放射スリット円板、円環領域への近似写像関数を構成し、その有効性を数値実験で検証する。

(3) 非有界な多重連結領域から螺旋スリット領域への近似写像関数を構成し、その有効性を数値実験で検証する。

(4) これらの成果を MATLAB の TOOLBOX として実装し、数値等角写像のための数学ソフトウェアとして公開する。

4. 研究成果

非有界な多重連結領域の問題については後述の意味で当初の計画以上の成果が得られた。その方法は有界な多重連結領域の場合にも適用可能である。研究の過程で Fortran と Scilab によるプログラムを作成した。しかし、数学ソフトウェアとして公開できるまでには至っていない。また、代用電荷法による数値等角写像に関してその他にも幾つか

の成果が得られた。以下にその概要を記す。

(1) まず, Koebe (1916)の正準スリット領域への数値等角写像に関して得られた成果を記す。

① 非有界な多重連結領域の場合:  $z$  平面上の単純閉曲線  $C_1, \dots, C_n$  の外側の無限円点を含む非有界な  $n$  重連結領域を  $D$  とし,  $D$  から  $w$  平面上的のスリット  $S_1, \dots, S_n$  の斜角  $\theta_1, \dots, \theta_n$  (実軸となす角) を個別に指定した直線スリット領域への等角写像  $w=f(z)$  の近似写像関数を正規化条件  $f(\infty)=\infty$  の下に構成し, その有効性を数値実験で検証した (論文 5). ここでは, 代用電荷法が調和関数の境界値問題の近似解法から複素対数関数の 1 次結合による解析関数の境界値問題の直接的な近似解法として拡張, 適用されている. また, 同様に個々のスリットの斜角 (放射半直線となす角) を個別に指定した螺旋スリット領域への近似写像関数を構成し, その有効性を数値実験で確認した (論文 4, 発表 1, 4 等). 斜角が  $\pi/2, 0$  の螺旋スリットは円弧スリット, 放射スリットである。

これらの結果は個々のスリットの斜角を個別に指定した直線, 螺旋スリット領域への近似写像関数の統合的な構成法を与える. ここに, 統合的とは問題が同一の係数行列を持つ連立 1 次方程式に帰着されることを意味する. また, スリットの斜角を個別に指定できることは Koebe の正準スリット領域の自然な拡張になっている. 図 3 は, 3 円  $C_1, C_2, C_3$  の外側を  $D$  として, 同じ斜角の組  $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$  を指定した場合の直線スリット領域 (記号 L) と螺旋スリット領域 (記号 S) への計算例を対比したものである. 数字は斜角の組番号である。

② 有界な多重連結領域の場合: 上記の非有界な螺旋スリットに対する境界条件の設定は有界な多重連結領域の問題にも適用可能である (発表 8, 9). 原理的には,  $z$  平面上の閉曲線  $C_1$  の内側かつ  $C_2, \dots, C_n$  の外側の領域を  $D$  とし,  $D$  から  $w$  平面上的の円弧スリット円板領域と円環領域への数値等角写像 (Journal of Computational and Applied Mathematics, 2003) で円弧スリットに移る閉曲線上の境界条件を螺旋スリットの境界条件に変更するだけでよい. 図 4 に問題の 4 重連結領域 (左上) と螺旋スリット円板領域 (右上), 円弧放射スリット円板領域 (左下), 円環領域 (右下) への計算例を示す。

以上の結果, 代用電荷法を用いて, 図 2 の正準スリット領域への表現が簡潔で精度の高い近似写像関数の構成がより一般的な形で可能になった。

(2) 次いで, 代用電荷法による数値等角写像に関して得られたその他の研果を記す。

① 非有界な多重連結領域の等角写像に関する近年の研究を (a) 平行スリット領域, (b) 円弧スリット領域, (c) 放射スリット領域への近似写像関数の統合的な構成法として整理した. これらの等角写像によって, 例えば

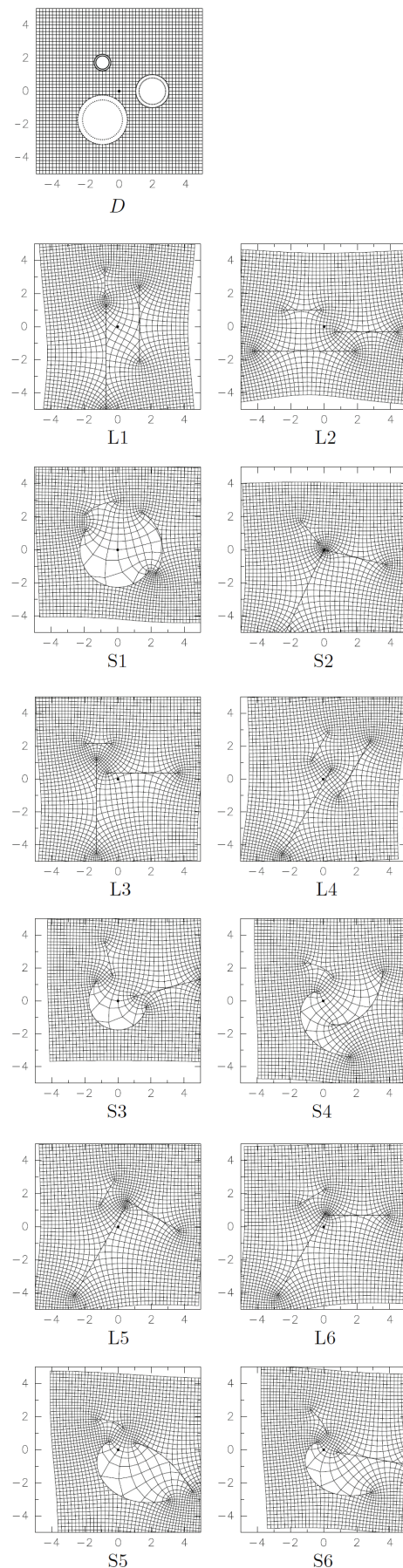


図 3 非有界な多重連結領域の計算例

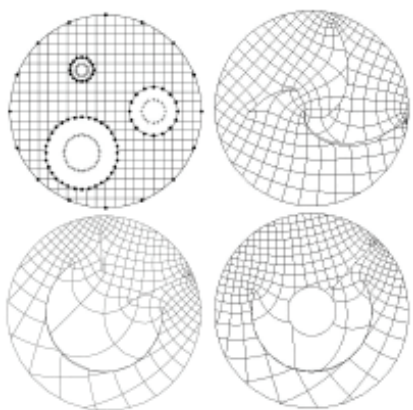


図4 有界な多重連結領域の計算例

障害物を過ぎる一様流，渦流，湧き出し（吸い込み）流の解析が可能である．また，正規化条件を  $f(\infty)=\infty$  から  $f(v)=\infty$  ( $v \in D$ ,  $|v| < \infty$ ) に変更して，同様に上記の3種のスリット領域への統一的な近似写像関数の構成法として整理した．これらの等角写像によって，例えば障害物を過ぎる2重湧き出し流，渦対流，湧き出し吸い込み対流の解析が可能である．（論文7）

②  $z$  平面上の閉曲線  $C$  で囲まれた有界な単連結領域  $D$  から  $w$  平面上の単位円板領域への等角写像  $w=f(z)$  の表現が簡潔な近似写像関数の構成法を3点対応の正規化条件  $f(z_i)=w_i$ ,  $z_i \in C$ ,  $|w_i|=1$ ,  $i=1, 2, 3$  の下に与えた．基本的なアイデアは，境界上の対応関係から  $f(z_0)=0$  となる点  $z_0$  を求めて，問題の等角写像の近似写像関数をこの条件を満たす等価な等角写像の近似写像関数として再構成するというものである．（論文2, 3）

③ スリットを含む矩形領域から円環領域への等角写像の近似写像関数の構成法を与え，画像処理への適用例を示した．基本的なアイデアは，Joukowski 逆変換を前処理に用いてスリットを切り開いて閉曲線の内部に移し，こうして得られた有界な2重連結領域に代用電荷法を適用するというものである．（論文6）

## 5. 主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 8 件）

(1) 天野 要：代用電荷法による数値等角写像，工学ジャーナル，査読無，Vol.13, pp.1-12 (2014)．

(2) Okano, D. and Amano, K.：Computation of conformal mapping functions on simply connected domains by the charge simulation method，査読有，Information, Vol.17, No.1, pp.7-13 (2014)．

(3) Okano, D. and Amano, K.：Computation of conformal mapping functions on simply connected domains by the charge simulation

method, 査読有，Proceedings of The 6th International Conference on Information, pp.408-411 (2013)．

(4) Amano, K., Okano, D., Endo, K. and Ogata, H.：Numerical conformal mappings onto the spiral slit domain by the charge simulation method, 査読有，Information, Vol.16, No.12(B), pp.8575-8578 (2013)；査読有，Proceedings of The 6th International Conference on Information, pp.232-235 (2013)．

(5) Amano, K., Okano, D., Ogata, H. and Sugihara, M.：Numerical conformal mappings onto the linear slit domain, 査読有，Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, Vol.29, No.2, pp.165-186 (2012)．

doi:10.1007/s13160-012-0058-0

(6) Okano, D., Endo, K. and Amano, K.：Numerical conformal mappings on rectangular domains with a slit, 査読有，Theoretical and Applied Mechanics Japan, Vol.60, pp.333-341 (2011)．

(7) Amano, K. and Okano, D.：Numerical conformal mappings onto the canonical slit domains, 査読有，Theoretical and Applied Mechanics Japan, Vol.60, pp.317-332 (2012)．

(8) Amano, K., Silagadze, G. and Zakradze, M.：A note on the univalence of approximate conformal mapping functions, 査読有，Proceedings of A. Razmadze Mathematical Institute, Vol.157, pp.1-10 (2011)．

〔学会発表〕（計 24 件）

(1) 天野 要：代用電荷法による数値等角写像について，日本応用数学会環瀬戸内応用数理研究部会第17回シンポジウム，愛媛大学（2014年1月11日）

(2) 岡野 大, 天野 要：近似境界対応関数を利用した代用電荷法による数値等角写像，日本応用数学会 2013 年度年会，アクロス福岡（2013年9月11日）

(3) 天野 要, 岡野 大：複素対数関数の主値に起因する数値等角写像の不連続性，日本応用数学会 2013 年度年会，アクロス福岡（2013年9月11日）

(4) 天野 要, 岡野 大, 遠藤慶一，緒方秀教：代用電荷法によるKoebe (1916)の正準スリット領域への数値等角写像，第42回数値解析シンポジウム，道後温泉道後館（2013年6月14日）

(5) Okano, D. and Amano, K.：Computation of conformal mapping functions on simply connected domains by the charge simulation method, The 6th International Conference on Information, Hotel Arcadia Ichigaya, Tokyo (2013年5月11日)

(6) Amano, K., Okano, D., Endo, K. and

Ogata, H.: Numerical conformal mappings onto the spiral slit domain by the charge simulation method, The 6th International Conference on Information, Hotel Arcadia Ichigaya, Tokyo (2013年5月8日)

(7) 天野 要, 岡野 大, 遠藤慶一, 緒方秀教: 代用電荷法によるKoebe (1916)の正準スリット領域への数値等角写像, 日本応用数理学会環瀬戸内応用数理研究部会第16回シンポジウム, 愛媛大学 (2013年1月6日)

(8) 天野 要, 岡野 大: 代用電荷法とKoebe (1916)による正準スリット領域への数値等角写像, 日本応用数理学会2012年度年会, 稚内全日空ホテル (2012年8月31日)

(9) 岡野 大, 天野 要, 遠藤慶一: Koebeの正準領域への数値等角写像, 日本応用数理学会2012年度年会, 稚内全日空ホテル (2012年8月31日)

(10) 天野 要, 岡野 大: 数値等角写像の連続スキームについて, 第41回数値解析シンポジウム, 伊香保温泉 (2012年6月8日)

(11) 天野 要, 岡野 大: 代用電荷法による正準スリット領域への数値等角写像, 日本応用数理学会環瀬戸内応用数理研究部会第15回シンポジウム, 山口東京理科大学 (2011年12月3日)

(12) 岡野 大, 天野 要: 代用電荷法による数値等角写像における近似写像関数の構成, 日本応用数理学会環瀬戸内応用数理研究部会第15回シンポジウム, 山口東京理科大学 (2011年12月3日)

(13) 岡野 大, 天野 要: 直線スリット領域の数値等角写像, 日本応用数理学会2011年度年会, 同志社大学 (2011年9月16日)

(14) 天野 要, 岡野 大: 正準領域への数値等角写像について, 第40回数値解析シンポジウム, 鳥羽シーサイドホテル (2011年6月20日)

(15) 岡野 大, 天野 要: スリットを含む標準領域から一般領域への数値等角写像, 第40回数値解析シンポジウム, 鳥羽シーサイドホテル (2011年6月20日)

[図書] (計 1件)

(1) 天野 要, 岡野 大: 朝倉書店, 応用数理ハンドブック, 2013, pp. 474-475.

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

天野 要 (AMANO, Kaname)  
愛媛大学・大学院理工学研究科・教授  
研究者番号: 80113512

### (3) 連携研究者

岡野 大 (OKANO, Dai)  
愛媛大学・大学院理工学研究科・准教授  
研究者番号: 90294785