

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 1 日現在

機関番号：17102

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2011～2014

課題番号：23540142

研究課題名(和文) 離散凸解析の拡張と離散不動点定理の研究

研究課題名(英文) Studies on discrete convex analysis and discrete fixed point theorems

研究代表者

川崎 英文 (Kawasaki, Hidefumi)

九州大学・数理(科)学研究科(研究院)・教授

研究者番号：90161306

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円

研究成果の概要(和文)：最適化理論とゲーム理論において、不動点定理と凸解析を軸に連続構造と離散構造の研究を行った。離散凸解析の諸定理の証明の検証を行ない、いくつか拡張を与えた。L凸関数の凸拡張性に関して新証明を与え、命題の逆を証明した。分離定理を3個以上のL凸集合に拡張した。ブラウワーの不動点定理、スペルナーの補題、Hex定理等の関係を詳しく調べ、標準単体の等分割の頂点集合からそれ自身への写像について、完全ラベル小単体が離散不動点をもつための十分条件を与えた。本研究を基にした専門書「均衡と極値の連続と離散構造」の原稿が260頁になった。

研究成果の概要(英文)：We studied continuous and discrete structure in optimization theory and game theory with fixed point theorems and convex analysis at the core. We have verified theorems of discrete convex analysis and obtained some extensions. We gave a new proof of convex extension of L-convex functions and proved the inverse of the theorem. We have extended the separation theorem of L-convex sets to three or more L-convex sets. We have studied the relationship between Brouwer's thm., Spernar's lemma, Hex thm., and so on, and presented a sufficient condition that a mapping from the vertices of equilateral subdivision of the standard simplex into itself has a discrete fixed point on each completely labeled subsimplex. We have typed 260 pages of a book titled "Continuous and discrete structure of equilibria and extrema".

研究分野：最適化理論

キーワード：最適化理論 ゲーム理論 不動点定理 ナッシュ均衡 組合せ最適化 離散凸解析

1. 研究開始当初の背景

離散最適化と離散不動点定理の二つに分けて背景を説明する。

(1) 離散最適化：最適化の分野では、連続系、離散系の数学的枠組みを越えた研究により強力な解法が得られるようになった。例えば、連続最適化のひとつである半正定値計画問題は離散的な整数計画問題に対する緩和問題として非常に有効である。一方、理論面では、ロヴァッツ (1983) が劣モジュラ関数 (離散) と凸関数 (連続) の間の重要な関係を解明し、「劣モジュラ関数≒離散的な凸関数」という認識が広まった。また、藤重悟はポリマトロイドを拡張した劣モジュラ解析 (1991) を展開し、離散系においても連続系に似た双対定理が成立することを明らかにした。さらに、室田一雄は離散凸解析を提唱し (1998)、組み合わせ最適化の凸性に関する基盤理論を構築した。離散凸解析では M 凸性 (マトロイド) と L 凸性 (ラティス) の 2 種類の凸性を取り扱うが、室田の研究によりそれらが互いに共役であることが明らかになった。その一方で、M 凸集合は劣モジュラ解析の基多面体の交換公理に光を当てたものであり、取り扱う集合族そのものが広がった訳ではなかった。また、L 凸関数の区分的線形拡張が凸関数であるという結果はあるが、その逆命題は得られていなかった。これはロヴァッツの結果の半分しか拡張されていないことを意味する。さらに、「離散的な凸関数は何か?」と言う基本的な問いについても、劣モジュラ関数が凸性と凹性を併せ持つなど、決定的な答えは得られていない。その他、離散凸解析では、古典的凸解析の基本的な命題「凸関数 \Leftrightarrow エピグラフが凸集合」に対応する命題が得られていないなど、離散凸解析の功績は大であるが、それが古典的な凸解析に匹敵する確固とした地位を築いたとまでは言えない。

(2) 離散不動点定理：ナッシュはブラウワーの不動点定理を用いて、 n 人非協力ゲームが必ず均衡解をもつことを証明した。これを契機に、角谷の不動点定理などを用いて経済の均衡問題が盛んに研究されるようになり、1994 年にナッシュがノーベル経済学賞を受賞したことは周知の事実である。

本研究が対象とした離散不動点定理は 3 つのタイプが考えられる。ブラウワーの不動点定理を利用するもの。単調写像。縮小写像。

離散不動点定理を用いると、サイコロを振って戦略を決める混合戦略ナッシュ均衡ではなく、サイコロを振る必要のない純戦略均衡の存在を示すことができる。本研究では、純戦略均衡を試金石として、様々な離散不動点定理を研究することにした。

2. 研究の目的

本研究の大枠は、最適化理論とゲーム理論の分野で、凸性と不動点定理を軸に、連続構造と離散構造を比較しながら研究すること

である。具体的には、

- (1) 劣モジュラ関数の凸性や凹性について、その性質を詳細に調べる。
- (2) 非有界な離散集合について、その離散凸性を研究し、エピグラフに関する疑問を解決する。
- (3) 離散分離定理を 3 個以上の離散凸集合に拡張し、離散非線形計画法への道を拓く。
- (4) 劣モジュラ系の理論は分配束上で展開されているが、一般の束上でその展開を試みる。
- (5) 離散凸解析と離散不動点定理の両方で用いられる領域の単体分割の研究をおこなう。
- (6) 純戦略均衡を試金石として、様々な離散不動点定理の強弱や相互関係を調べる。同時に、純戦略ナッシュ均衡をもつ非協力ゲームの特徴を、離散不動点定理を用いて理論的に解明する。

3. 研究の方法

数理学の理論研究という性質上、研究代表者個人の思索を軸として本研究を進めたが、他研究機関の研究者と議論を重ねることによりこれを補足した。また、国内の学会 (日本数学会、日本オペレーションズ・リサーチ学会、日本応用数学会)、国内外のシンポジウム・研究集会 (京都大学数理解析研究所研究集会、RAMP シンポジウム、オペレーションズ・リサーチ及び非線形解析と凸解析の国際シンポジウム等) に参加し、研究課題に関連する情報の収集、研究成果の発表、研究討論をおこなった。特に、7 月に京都大学で開催される組合せ最適化のセミナーに毎年参加し、劣モジュラ解析、離散凸解析およびその周辺の研究の最前線を把握するとともに議論を交わした。

4. 研究成果

離散最適化と離散不動点定理の二つに分けて研究成果を説明する。

(1) 離散最適化：L 凸関数の区分的線形拡張が凸関数になるという室田の結果に対する厳密な別証明を与え、逆の命題を証明した。この研究成果は日本・ハンガリー組合せ最適化シンポジウム予稿集に掲載されることが決まっている。また、3 個以上の L 凸集合と L_q 凸集合に対する分離定理を与えることに成功した。

(2) 離散不動点定理：ブラウワーの不動点定理に帰着させるタイプの離散不動点定理に関する研究が進展し、単調写像の不動点定理との比較が可能になった。前者については、最初に格子点で定義された写像を格子の単体分割を基に区分的線形写像に拡張する。次に、得られた連続写像にブラウワーの不動点定理を適用して不動点を得る。最後に、付加的な条件を与えて、その不動点が整数点であることを示す。飯村は付加的な条件として方向保存条件を提案したが、研究代表者は双行列ゲーム (2 人非協力ゲーム) の最適応答写像について、方向保存条件の特徴づけに成功

した。本研究の特長は、図1左のフロイデンタル分割だけでなく、右のような任意の単体分割に対して適用可能なことである。

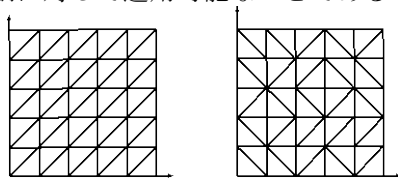


図1：フロイデンタル分割と一般の分割

さらに、この結果を n 人非協力ゲームに拡張した。すなわち、一般化フロイデンタル分割を定義し、最適応答写像に対する方向保存条件の特徴づけを与えた。これらの結果を非協力ゲームに適用して、純戦略ナッシュ均衡の存在を示した。

単調写像の離散不動点定理としてはタルスキーの不動点定理が有名であるが、双行列ゲームを通して、単調写像に対する離散不動点定理と上述の不動点定理との比較をおこない、それぞれの特長を把握した。つまり、単調写像の不動点定理は図2のような最適応答写像が単調増加あるいは単調減少のゲームが純戦略均衡をもつことを保証する。

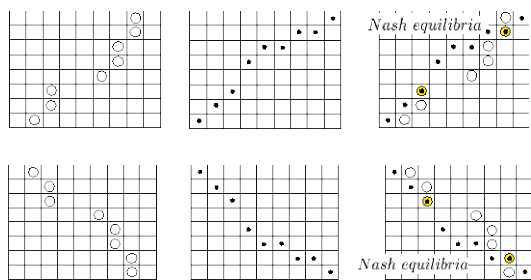


図2：単調な最適応答

一方、ブラウワーの不動点定理を利用するのは図3のような最適応答のジャンプ幅が高々1のものに限定されるが、単調でない最適応答写像も取り扱える。

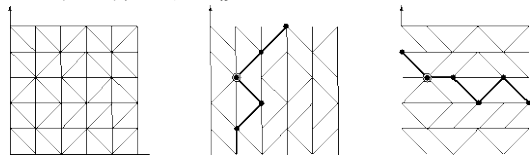


図3：ジャンプ幅が高々1の最適応答

ロバート(1986)によるブール代数 $\{0, 1\}$ 上の縮小写像に対する離散不動点定理を整数格子点上の不動点定理に拡張した。応用として、完全情報をもつ展開形ゲーム(図4)が純戦略ナッシュ均衡をもつというキューンの定理の別証明を与え、その研究成果が国際誌に掲載された。

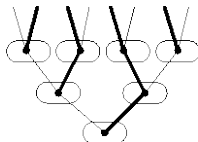


図5：完全情報展開形ゲーム

その他、単調写像の離散不動点定理とそのゲーム理論への応用に関する竹下潤一氏との共著論文が日本オペレーションズ・リサーチ学会誌に掲載された。

以上の研究成果により、「純戦略ナッシュ均衡の存在定理の背後には何らかの離散不動点定理が存在する筈である。」という研究代表者の予想が裏付けられ、本研究の正当性が示されたと考える。

ブラウワーの不動点定理、スペルナーの補題、Hex 定理等の関係を詳しく調べ、標準単体の等分割の頂点集合からそれ自身への写像について、完全ラベル小単体が離散不動点をもつための十分条件を与えた。この結果を非線形解析と最適化の国際シンポジウムで発表した。

以上の研究成果を執筆中の専門書「均衡と極値の離散と連続構造」に書き加え、原稿が260頁になった。本書はセルフコンテインドなので、証明を理解するために数多くの書籍や文献を読み歩く必要がないという特長をもつ。内容は以下の通りである。

- 1 章：凸集合と分離定理
- 2 章：ブラウワーの不動点定理とスペルナーの補題
- 3 章：ボルスク・ウラムの定理とタッカーの補題
- 4 章：縮小写像の離散不動点定理
- 5 章：非拡大写像と共通不動点
- 6 章：単調写像の不動点定理
- 7 章：射影平面と有限射影平面
- 8 章：フローとマッチング
- 9 章：凸多面体の基礎
- 10 章：線形方程式と凸多面体の整数性
- 11 章：マトロイド
- 12 章：劣モジュラ系
- 13 章：交わり定理と離散分離定理
- 14 章：離散凸解析-M 凸性
- 15 章：離散凸解析-L 凸性
- 16 章：整凸性

最後に、本研究から浮かび上がった研究課題を述べる。① 本研究で得られた縮小写像に対する離散不動点定理はリチャードの局所的な縮小写像の離散不動点定理(2008)を利用しているが、強い大域的な仮定を設けるなど、リチャードの結果を使い切っていない。リチャードの離散不動点定理に対応する純戦略ナッシュ均衡をもつゲームのクラスを解明する必要がある。② 本研究で考察した離散不動点定理以外に、シーと李による離散的なフシェッツ不動点公式があることを知った。フシェッツ不動点公式はトポロジーの深遠な定理であるため、その離散版は今後の研究で重要な役割を果たすものとする。③ 本研究で与えた3個以上のL(h)凸集合に対する分離定理は、それらの集合の境界を含む形で与えられている。この分離定理に非線形計画法ファークスの定理の役割を担わせた

いのであるが、そのためには境界を含まない L (h) 凸集合を含む形で分離定理を拡張する必要がある。④ 劣モジュラ関数のもつ凸性と凹性という二面性の問題は依然として未解決である。⑤ 関数の離散凸性とエピグラフの離散凸性の関係は依然として未解決である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者, 研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 5 件)

- ① H. Kawasaki, A proof of convex extension of L -convex functions, to appear in Proceedings of the 9th Japanese-Hungarian Symposium, (2015) 151-157. 査読有
- ② 川崎英文, L 凸関数の凸性の証明について, 数理解析研究所講究録 1939 「藤田敏治, 不確実性の下での数理モデルとその周辺」(2015) 172-178. 査読なし
- ③ H. Kawasaki, A. Kira, and S. Kira, An application of a discrete fixed point theorem to a game in expansive form, Asia-Pacific Journal of Operations Research, 30, No. 3, (2013) 134-139. 査読有
- ④ 川崎英文, 離散不動点定理と単体分割, 数理解析研究所講究録 1829 「梅谷俊治, 最適化手法の理論と応用の繋がり」(2013) 139-148. 査読なし
- ⑤ J. Takeshita and H. Kawasaki, Necessity and sufficiency for the existence of a pure-strategy Nash equilibrium, Journal of the Operations Research Society of Japan, 55, No. 3, (2012) 192-198. 査読有

[学会発表] (計 14 件)

- ① 川崎英文, L 凸関数の凸拡張性の証明, 日本 OR 学会春季研究発表会, 東京理科大学 (東京都), 2015 年 3 月 26 日.
- ② H. Kawasaki, Convexity of L -convex functions in discrete convex analysis, International Workshop on Nonlinear Analysis, Optimization and Applications, 国立釜慶大学校, 釜山 (韓国), 2015 年 12 月 12 日.
- ③ 川崎英文, Lovasz 拡張と L 凸関数の凸性について, 日本 OR 学会九州支部第 3 回講演会・研究会, 西南学院大学 (福岡市), 2014 年 12 月 6 日.
- ④ L 凸関数の凸性の証明について, 京大数理研研究集会: 不確実性の下での数理モデルとその周辺 (研究代表者: 藤田敏治), 京都大学数理解析研究所 (京都市), 2014 年 11 月 13 日.
- ⑤ H. Kawasaki, Sperner's lemma and related topics, The 4th Asian

Conference of Nonlinear Analysis and Optimization, 国立台湾師範大学, 台北 (台湾), 2014 年 8 月 9 日.

- ⑥ H. Kawasaki, Comparison of discrete fixed point theorems by a bimatrix game, The 20th Conference of the International Federation of Operational Research Societies, Centre de Convencions Internacional de Barcelona, バルセロナ (スペイン), 2014 年 7 月 15 日.
- ⑦ H. Kawasaki, Fixed point theorems and related topics, The 3rd International Congress on Natural Sciences, 新潟大学 (新潟市), 2013 年 10 月 12 日.
- ⑧ H. Kawasaki, Piecewise-linear extension and a discrete fixed point theorem, International Symposium on Nonlinear Analysis and Optimization 2013, 国立釜慶大学校, 釜山 (韓国), 2013 年 2 月 1 日.
- ⑨ 川崎英文, Brouwer の不動点定理に基づく離散不動点定理, 第 17 回統計・情報科学シンポジウム, 九州大学 (福岡市), 2012 年 12 月 7 日.
- ⑩ H. Kawasaki, Discrete fixed point theorems and simplicial decompositions, The 2nd International Congress on Natural Sciences, 高雄市 (台湾), 2012 年 10 月 23 日.
- ⑪ H. Kawasaki, Discrete fixed point theorems, The 4th International Symposium on Banach and Function Spaces, 九州工業大学 (北九州市), 2012 年 9 月 15 日.
- ⑫ 川崎英文, 離散不動点定理と単体分割, 京大数理研研究集 「最適化手法の理論と応用の繋がり」(研究代表者: 梅谷俊治), 京都大学数理解析研究所 (京都市) 2012 年 7 月 24 日.
- ⑬ 川崎英文, 離散不動点定理概要-ゲーム理論への応用, 松江セミナー, 島根大学 (松江市), 2012 年 7 月 4 日.
- ⑭ H. Kawasaki, A. Kira and H. Kira. An application of a discrete fixed point theorem to a game in expansive form, The 5th Sino-Japanese Optimization Conference, Institute of Computational Mathematics and Scientific Engineering Computing, 北京 (中国), 2011 年 9 月 27 日.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

川崎 英文 (KAWASAKI Hidefumi)

九州大学・大学院数理学研究院・教授
研究者番号: 90161306