様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２８ 年　 ６ 月　 ２ 日現在

機関番号：１７５０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2011～2015
課題番号：２３５４０１４９

研究課題名（和文）積空間の理論から超空間の位相的性質の解明へ：集合論的手法の模索

研究課題名（英文）Investigation of topological properties of hyperspaces from the theory of products: seeking set theoretical approaches

研究代表者
家本　宣幸（Kemoto, Nobuyuki）

大分大学・教育福祉科学部・教授

研究者番号：７０１６１８２５

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,700,000円

研究成果の概要（和文）：当初の目的は、位相空間の積空間の理論を応用し、集合論的な手法を利用して超空間の位相的性質を解明することであった。その結果、集合論で使われる初等部分モデルの理論が閉集合全体やコンパクト集合全体からなる超空間の正規性などの位相的性質の解明に有効であることがわかった。その中で自然数の部分集合全体からなる超空間が可算メタコンパクトかどうかについては未解決のままであるが、この一連の研究の中で20年近く未解決のままであった順序位相空間の積の可算メタコンパクト性の問題の否定的解決に至り、当初の目的以外の方向に発展した。

研究成果の概要（英文）：Original purposes of this research were, using some set theoretical techniques,to investigate topological properties of hyper spaces by means of product theory. As results, applying set theoretical tool so called the elementary submodels, we have some results about normality or other topological properties of hyperspaces of all closed sets or all compact sets. On the other hand, whether the hyperspace of all subsets of the natural numbers is countably metacompact remains open. But we obtain an answer to the problem whether the products of two generalized ordered are countably metacompact, which has remained open for twenty years.

研究分野：数物系科学

キーワード：topology　products　hyperspaces　ordinal numbers　ordered spaces　elementary submodels

１．研究開始当初の背景

順序数の理論は集合論の理論の根幹をなすものである。近年、集合論では順序数の理論を中心として、構成可能集合 L の理論、初等部分モデルの理論、強制法の理論などが飛躍的に発展した。一方、位相空間論における積空間の理論は 1960 年代に始まり、日本での研究は世界をリードしている。90 年代からは本研究代表者らを中心に順序数の積空間の研究が始まり、現在も活発に研究されている。

順序数の積空間の研究の発端は、互いに素なω_1の stationary sets X_1, X_2 についてその積空間 $X= X_1\times X_2$ は正規でも可算パラコンパクトでもないという本研究代表者らのグループの 1992 年の研究である。その後、1996 年には可算パラコンパクトを少し弱めた性質可算メタコンパクトについて、$\omega_1{}^2$ のどんな部分空間 X も可算メタコンパクトになることを示した。これらは更に発展させられ、順序数の有限積の部分空間 X は常に可算メタコンパクトになることまでわかってきた。また、ω_1の可算無限積$\omega_1{}^\omega$の可算メタコンパクトでない部分空間も本研究代表者らによって構成された。これらの理論はその後Σ-積、σ-積や無限積などの位相的性質、特に正規性、オルソコンパクト性、強ゼロ次元性などの解明に役立つこととなった。

順序位相空間は順序数空間の一般化である。実数空間は順序位相空間であるが順序数空間ではない。1996 年の可算メタコンパクト性の結果に関連して、二つの順序位相空間の積は可算メタコンパクトか？という問題は、十数年来の未解決問題である。

一方、距離空間 X の閉集合全体からなる超空間 2^X やコンパクト集合全体からなる超空間 K(X) は 1960 年代よりよく研究されている。ここで、超空間とは Vietoris 位相を入れて考える。しかし、元の空間の情報から超空間の位相的性質を導き出すのには一般的には困難を伴う。自然数の有限集合全体からなる超空間 K(ω) が正規であることは簡単ですぐわかることであるが、一方で 1980 年代になってやっと、自然数の部分集合全体からなる超空間 2^ωが正規でないことがわかった。本研究代表者は 2007 年に、自然数より大きい順序数空間の超空間の位相的性質を分析し次の結果を得た。αを順序数空間とするとき、

(1) 2^αが可算パラコンパクトである必要十分条件はαの共終性が可算でない、
(2) K(α)は常に可算パラコンパクトである、
(3) K(α)が正規であることの必要十分条件はαの共終性が可算か正則であることである。

この結果は超空間の理論に集合論の初等部分モデルの理論を取り入れた初の結果で世界的にも高く評価された。可算メタコンパクトは可算パラコンパクトより弱い性質だから(1)から、αの共終性が可算でないなら 2^αが可算メタコンパクトになる。一方で、αの共終性が可算の時、2^αが可算メタコンパクトになるかどうかはわかっていない。特に、2^ωが可算メタコンパクトかどうかさえわかっていない。

２．研究の目的

5 年間の研究期間のなかで、超空間に関するいくつかの問題を考察する。特に

問題 I. 自然数の部分集合全体からなる超空間 2^ωが可算メタコンパクトであるか？

について解決の糸口を見つけたい。もう少し一般に可算共終性をもつ順序数αについ 2^αの可算メタコンパクト性がどうなるかも考察したい。さらに

問題 II. αが順序数の時、いろいろな超空間位相を入れた 2^α、K(α) やαの有限集合全体からなる超空間 F(α) がどのような位相的性質を持つか？

について考察する。位相的性質としては オルソコンパクト、subnormal、κ-normal、パラコンパクト、強ゼロ次元などを考える。次に

問題 III. R を実数直線とするとき、R の収束部分列全体からなる超空間 C(R) と、ω_1の収束部分列全体からなる超空間 C(ω_1)が同相になるか？

について考察をする。最後に

問題 IV. S を Sorgenfrey 直線とするとき、そのいろいろな超空間はどのような位相的性質を持つか？

について考察する。これらの考察には集合論の手法である初等部分モデルが有効であることがある程度わかってきているので、その利用の方法をさらに発展させたい。

３．研究の方法

基本的に、この研究は一人で行った。同時にこれまでの研究パートナーや集合論の研究者たちのアイデアや最新情報を、国内のセミナーやシンポジウムで収集した。本研究者の研究パートナーは関東方面に多く、また、シンポジウムなどは関西で開催されることが多い。本研究の研究旅費を利用してそれらに出席し、研究打ち合わせや情報収集をした。

雑誌や図書は多くは手元にはないので、普段の研究活動はインターネットによる電子ジャーナル閲覧や、電子メールによる情報交換が主となった。そのため、本研究開始時にデスクトップパソコンを更新した。同時にプリンタなどの周辺機器も更新した。これらのパソコンや周辺機器は原稿作成などの執筆作成などにも威力を発することとなった。

　また持ち運びに便利な小型ノートパソコンや持ち運び可能な通信用の小型ルーターを本研究費で買った。これらは発表用や、旅先での研究情報交換に有用であった。最近のシンポジウムや学会などの発表はパソコン画面をプロジェクターで映し出すことが多く、多くの場合展開が早く記録が間に合わない。そのため、当初は本研究費で買ったデジタルカメラで重要な事柄を記録していったが、時代の流れで研究期間の終わり頃になるとタブレットがそれを代用してくれるようになった。

　通常、年 2 回の学会、それぞれ最低年 2 回のトポロジーと集合論の研究集会が恒常的に開催される。本研究の研究旅費を利用してそれらのほとんどに出席し、その他にも個別の研究者を訪ね研究のアイデアを出し合った。情報収集や研究打ち合わせに研究旅費を有効利用することができた。

４．研究成果

　まず、概要を述べておく。最初に研究目的の問題Ｉの考察から始めた。問題Ｉの解を得るには至らなかったが、問題Ｉと同値になる条件を導き出し、問題 II や問題 IV に関連する結果が得られた。また、問題 II に関連し、超空間における連続関数の拡張可能性についてメキシコの若い数学者らと結果を得ることができた。問題Ｉの考察の途上、順序位相空間の積の可算メタコンパクト性に関する 20 年来の未解決問題に決着をつけるという予想外の展開があった。また、この問題の考察に使った辞書式順序積についての新たな展開もあった。また、順序位相空間の概念を弱めた概念である単調正規位相空間と種々の位相空間の積の位相的性質の解明も進んだ。近年、ある種の超空間の連続選択関数の存在は積空間の順序化可能性と関係することがわかり始めている。これに関連し、積空間が順序化可能であれば、それぞれのファクターがどのような位相的性質を持っているかを考察した。問題 III の考察まで手が回らなかったのが残念である。

　次に具体的な研究成果について順に述べる。問題Ｉの考察から始めた。問題Ｉそのものの解答を与えることはできなかったが、オルソコンパクトという位相的性質が問題Ｉに密接に関係することがわかり 2012 年に出版された神奈川大学・平田康史氏との共同研究では次が示された。

・任意の順序数 α について、そのコンパクト集合全体からなる超空間 $K(\alpha)$ がオルソコンパクトであることの必要十分条件は α が可算であるか、α が正則基数である。従って、$K(\alpha)$ がオルソコンパクトであることの必要十分条件はそれが正規であることである。

　問題Ｉと同値な命題をオルソコンパクトという言葉を使って言い換えることができた。

・自然数の部分集合全体からなる超空間 2^{ω} が可算メタコンパクトになることの必要十分条件はそれがオルソコンパクトになることである。

　また、問題 IV に関連し次の結果を得た。

・S を Sorgenfrey 直線とする時、そのコンパクト集合全体からなる超空間 $K(S)$ はオルソコンパクトである。従って S の累乗 S^2 はオルソコンパクトである。

　その他の論文が 2014 年に集まってしまったが、順を追って研究していたものが仕上げや校正の遅れなどによって偶然に 2014 年に重なってしまったものであるので、前後するかもしれないが研究の順にそれらの成果について述べる。

　2014 年の On C-embeddedness of hyperspaces はメキシコの若い研究者たち Y.F.Ortiz-Castillo と R.Rojas-Hernandez との共同研究で問題 II に関連し、順序数 α のコンパクト集合全体からなる超空間 $K(\alpha)$ と閉集合全体からなる超空間 2^{α} の関係が考察され、次が示された。

・$K(\alpha)$ 上の任意の実数値連続関数が 2^{α} に連続的に拡張できることの必要十分条件は α の共終性が可算でないことである。

　2014 年の Products of Monotonically normal spaces with various special factors は神奈川大学の平田康史氏と矢島幸信氏との共同研究で、順序位相空間の一般化である単調正規空間と種々の空間の積の位相的性質を解明したものである。次が示された。

・X を単調正規空間、K をコンパクト空間とする時、次は同値である。$X\times K$ は正規である、X の閉集合 E がある非可算正則基数 κ の stationary set と同相なら $E\times K$ は正規である、非可算正則基数 κ の stationary set と同相な X の閉集合が存在するような κ について K は κ-dop という性質を持つ。

・X を単調正規空間、K をコンパクト空間とする時、次は同値である。$X\times K$ はオルソコンパクトである、X の閉集合 E がある非可算正

則基数κの stationary set と同相なら E×K はオルソコンパクトである、X はオルソコンパクトで非可算正則基数κの stationary set と同相な X の閉集合が存在するようなκについて K は orthocaliberκという性質を持つ。

・X をオルソコンパクト単調正規空間、Y をパラコンパクト DC 空間とする時、次は同値である。X×Y は正規で矩形的である、X の閉集合 E がある非可算正則基数κの stationary set と同相なら E×Y は正規で矩形的である、非可算正則基数κの stationary set と同相な X の閉集合が存在するようなκについて Y はκ-dop という性質を持つ。

・X を単調正規空間、Y をメタコンパクト DC 空間とする時、次は同値である。X×Y はオルソコンパクトである、X はオルソコンパクトで X の閉集合 E がある非可算正則基数κの stationary set と同相なら E×Y はオルソコンパクトである、X はオルソコンパクトで非可算正則基数κの stationary set と同相な X の閉集合が存在するようなκについて Y は orthocaliberκという性質を持つ。

2014 年の Countable metacompactness of products of LOTS' は神奈川大学の平田康史氏との共同研究で順序数空間の一般化である順序位相空間の積の可算メタコンパクト性に関して 20 年間未解決であった問題に、辞書式順序積空間を利用することで解を与えた。

・κを非可算正則基数とするとき、継承的パラコンパクト順序位相空間 L で次の性質を満たすものが存在する。κのどんな stationary set S についても、L×S は可算メタコンパクトではない。

・X が 1-可算コンパクト パラコンパクト順序位相空間、Y が 1-可算コンパクト順序位相空間であれば、その積空間 X×Y は可算メタコンパクトである。

上記で利用した辞書式順序積空間は、2014 年の論文 The lexicographic ordered products and the usual Tychnoff products において順序数の辞書式順序積の位相的性質の解明に役立った。次の結果を得た。

・辞書式順序積$\omega_1{}^{\omega}$ はω-bounded である。
・辞書式順序積$\omega_1{}^{\omega+1}$ はω-bounded でない。
・辞書式順序積 2^{ω}は辞書式順序積 3^{ω}の部分空間である。
・辞書式順序積 $2^{\omega+1}$は辞書式順序積 $3^{\omega+1}$の部分空間でない。
・辞書式順序積 2^{ω}と辞書式順序積 3^{ω}は同相である。
・辞書式順序積 $2^{\omega+1}$と辞書式順序積 $3^{\omega+1}$は同相でない。

最後に、Orderability of products(掲載予定)について述べる。近年超空間の連続選択関数の存在に積空間の順序化可能性の関係が議論されているが、これに関連して次の結果を得た。

・疎でない位相空間 X、Y の積空間 X×Y が順序化可能であれば、X も Y も継承的パラコンパクトで、ただ一つ無限基数κが存在して、X、Y のどの点 z についてもその左右の共終性が 0,1,κのどれかである。また、X、Y が順序数の部分空間ならその逆も成立する。

以上、当初の研究の目的はおおむね達成され、それ以外の大きな未解決問題にも解を与えることができ、良い研究ができたと思う。本研究費の配分に感謝したい。今後、これらの問題のうち残っている未解決問題に解が与えられるよう、精進して研究したいと思う。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　8　件）

① 家本宣幸,Orderability of products, Top.Proc.(2016 掲載予定)　査読有
② 家本宣幸, 辞書式順序積と普通のチコノフ積, 集合論的・集合論的・集合論的・幾何学的トポロジーと種々の分野交流, 京都大学数理解析研究所講究録, 1932(2015)50-59　査読無
③ 平田康史, 家本宣幸, Countable metacompactness of products of LOTS', Top. Appl., 178 (2014) 1-16　査読有 http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0166864114003381
④ 平田康史,家本宣幸,矢島幸信, Products of monotonically normal spaces with various special factors, Top. Appl., 164 (2014) 45-86　査読有 http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0166864113004677
⑤ 家本宣幸, Y. F. Ortiz-Castillo and R. Rojas-Hernandez, On C-embeddedness of Hyperspaces, Top. Appl., 162 (2014) 34-42　査読有 http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0166864113004574
⑥ 家本宣幸, The lexicographic ordered products and the usual Tychonoff products, Top. Appl., 162 (2014) 20-33　査読有　http://www.sciencedirect.

com/science/article/pii/S0166864113004434

⑦ 平田康史，家本宣幸， Countable metacompactness of products of LOTS, 一般位相幾何学および幾何学的トポロジーの現状と諸問題，京都大学数理解析研究所講究録，1833(2012)85-91　査読無

⑧ 平田康史,家本宣幸，Orthocompactness versus normality in hyperspaces, Top. Appl.，159 (2012) 1169-1176 査読有 http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S016686411100527X

〔学会発表〕（計　3　件）

① 家本宣幸,辞書式順序積と普通のチコノフ積，集合論的・幾何学的トポロジーと種々の分野交流，京都大学数理解析研究所(京都府京都市)，October 22-24(2014).

② 平田康史，家本宣幸， Countable metacompactness of products of LOTS, 一般位相幾何学および幾何学的トポロジーの現状と諸問題，京都大学数理解析研究所（京都府京都市），September 25-28(2012).

③ 家本宣幸，Monotonic normal 空間と種々の位相空間との積の位相的性質について，2012 第 59 回トポロジーシンポジウム，佐賀大学（佐賀県佐賀市），August 11-14(2012)，(招待講演).

〔図書〕（計　0　件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計　0　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計　0　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織
(1)研究代表者
家本　宣幸（KEMOTO NOBUYUKI）
大分大学・教育福祉科学部・教授
研究者番号：70161825

(2)研究分担者
（　　　）

研究者番号：

(3)連携研究者
（　　　）

研究者番号：