

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 16 日現在

機関番号：23901

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2011～2013

課題番号：23540153

研究課題名(和文)新しいノイズによる安定過程の汎関数解析と応用

研究課題名(英文)Analysis of functionals of stable processes depending on new noise

研究代表者

S i S i (Si, Si)

愛知県立大学・情報科学部・教授

研究者番号：70269687

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,200,000円、(間接経費) 960,000円

研究成果の概要(和文)：偶然現象の確率論的研究においては、その現象を記述する確率変数のシステムに対して、それと同等な情報を持つ「独立」な確率変数系を構成し、扱う現象をそれら関数として表し、その解析を行って、与えられた偶然現象を解明する。独立確率変数系には時空のパラメータがつくが、その確率分布は、パラメータに関して定常性など好都合な性質を要求すれば、ガウス型とポアソン型の2種類となる。ガウス型の場合はよく知られているが、ポアソン型の場合、とくに空間パラメータのときは、解明すべき事が多い。安定性を持つ場合に、詳しい確率論的性質を調べ、その応用として安定過程の場合の不変性や双対性などについて研究成果を得た。

研究成果の概要(英文)：Our idea of the research of random complex phenomena is the so-called reductionism. We first obtain a system of independent random variables that contain the same information as that of the given random system so that the given random phenomena can be expressed as functions of the independent random variables just formed. We are ready to carry on the analysis of those functions in question. We have confirmed that the probability distributions of the system of independent random variables are limited either Gaussian or Poisson type under reasonable assumptions. We have studied the latter case where not so well known, and obtained good applications to stable stochastic processes.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学一般(含確率論・統計数学)・確率論

キーワード：ホワイトノイズ 新ノイズ 安定仮定 重複度 ポアソン型

1. 研究開始当初の背景

確率過程論の研究においては、これまでマルコフ過程とか定常過程など、それぞれの研究内容に応じて、数学の手法を開発して研究することが多かった。最近の研究課題も多種多様となり、用いる数学も高度化し、かつ共通課題もおおくなった。確率過程の一層の発展を期待するため、これまで細分化された研究課題や方法にも共通点を見出し、より有機的な研究が望まれるようになった。

これに応じて、次のような方針を掲げて、その方向で確率論研究の共通な基礎理論を固め、さらに具体的な課題へのアプローチを続けてきた。基礎理論はいわゆる確率事象の帰納化(Reduction)である。偶然現象を記述する確率変数の系を、それと同じ情報をもつ独立な確率変数系を構成し、その関数として与えられた偶然現象を表し、さらにそれら関数の解析を行って、目的の偶然現象を解明する。基本となる独立確率変数系の解明と、その関数の扱いが活発に研究されている。

2. 研究の目的

最初の段階では、基礎となる考え方である帰納化をいかなる形で実現するかが問題になる。独立確率変数の系は、連続無限個を必要とする場合が重要であり、また興味深い。そのような系は理想化された変数の系でなければならないが、まずそれを明確に定義し、典型的なものとなる系の確率分布を決定する。それらは時間又は空間のパラメータをもち、分布はガウス型とポアソン型になる。それらの関数は超汎関数になり、解析の手段としての微分等の作用素の高度

化を目指す。

3. 研究の方法

時間または空間をパラメータにもつ独立確率変数系で定常性をもつものを総括してノイズと呼ぶ。時間をパラメータにもつノイズは、ガウス型とポアソン型とがあり比較的よく研究されてきた。しかし空間パラメータの場合の認識は薄く、それを積分したものが、加法過程の分解に現れる程度でノイズとしての研究は殆どなされなかった。

本研究では、空間パラメータのノイズ(新しいノイズとして)の研究を主とする。始めにこのようなノイズの構成を種々試みて、自然現象に現れた場合に、その発生源の検索に役立てる準備とした。このノイズがいわゆる **underlying process** として偶然現象の変化に作用するときのメカニズム探求のため、その非線形汎数の解析的取り扱いの研究を進めた。手法は関数解析の他に、ノイズに働く変換群の有効な利用があった。

4. 研究成果

空間パラメータのノイズの研究に終始したが、既存の成果に乏しく、また時間パラメータのノイズの研究との類似は少なく、最初から出発するしか他に方法がなかった。以下、このような基礎から出発して得た主な成果とその応用(数学の内部におけるものと、他分野との連携の上で)について説明する。

1) 空間パラメータのノイズの基礎理論

空間パラメータのノイズの構成は、既存の結果で了解するには不十分であり、新たに独立同分布に従う有限次元の確率変数系

による近似法によって具体的に存在を示し、同時それが空間パラメータに依存する背景も知ることができた。それはポアソン型で、強度 λ とスケール u とに依存する。このような事情をふまえて、このノイズを $P'(\lambda(u))$ と表すことにした。この結果は、研究協力についての協定を結んでいるローマ大学ボルテラ研究センターとの交流により、先方を訪問して詳細を発表した。この他、ボルテラセンター(Centro Vito Volterra)との交流は、当方の訪問および、同センター所長の L. Accardi 教授の来訪も毎年続けられホットな研究テーマで議論をつづけてきた。その一部は、次のような研究報告として同研究所の報告集に掲載された。いずれも査読付きの公式のものである。

その2篇は下記の series で報告した。

Centro Vito Volterra, Universita'degli Studi di Roma "Tor Vergata"

- (1) Si Si, Boundary of homogeneous chaos. N. 640, Feb. 2014
- (2) Si Si, Graded rings of nonhomogeneous chaos generated by polynomials in noises depending on time and space parameters, respectively. N.638, Feb. 2014.

2) 空間パラメータのノイズの汎関数理論
このノイズの確率分布はポアソン型であり強度 λ とスケール u に依存する。強度 λ が異なれば分布のタイプはことなる。タイプは u には関係しない。前述の $P'(\lambda(u))$ は通常の変数ではなくて、一般化された超確率変数である。そのため、そのため $P'(\lambda(u))$ の関数(実は汎関数)は超汎関数になる。関数解析における超関数の理論

を確率変数を変数とする関数、しかも超関数の理論にまで拡張する必要があった。

これは、ガウス型のホワイトノイズの場合にモデルがあり、その理論を参考にして、一般論を構築することができた。また変数 u が2次元の上半平面を動くとき、その空間には周知の線形群 $SL(2, \mathbb{R})$ が作用するので、その応用として、一つの確率場の特性を見出すことができた。後述5.における K.S.Lee との共著論文参照。さらに $P'(\lambda(u))$, $u \in \mathbb{R}$, の非線形関数をあつかうときは、無限大があらわれるので、特別な「くりこみ」を適用する必要がある。この操作を、合理的な一般論から説明することに成功した。これは東京理科大学における QBIC 国際研究発表会で報告した。

これはガウス型のホワイトノイズの超汎関数の導入の場合の「くりこみ」と対比されるもので、空間パラメータのノイズの特性を表すものとして興味深いと考える。その結果は QBIC での報告の記録

An additive system generated by a new noise

となっている。この他の興味深い展開も多く見出すことができたが、ここでは省略したい。

3) 空間パラメータのノイズの応用。

新しいタイプのノイズであるだけに、これが設定されると、数学の、ときには理論物理の話題との関連が見出されるようになった。ここに、その一例をあげる。対象は確率論における極めて重要な式(formula というべきもの)である、加法過程(とくにレヴィ過程)の分解式にたいする解釈に新し

い視点を与え、かつ、いくらかの重要な補足をすることができたことである。それを簡単に述べる。確率分布で非負整数上に分布するものはよく知られ lattice 型の分布とも呼ばれている。ポアソン分布がその典型であるが、強度 λ によりタイプの異なった、いわば「素」なものが多数現れる。これを分布に対する変換を通しての見方をしてみよう。これは標準ポアソン過程、重要なレヴィ過程の例、を基準にとる。その母関数の主要部 (指数部分) $\lambda \exp[ut]$ に着目する。実は母関数で平均値に対する定数を無視し対数をとって主要部に相応しいものをきめたものである。これを基本関数としよう。この関数の変数は R を動く t である。そこで、変換といえば、必然的にアフィン変換群 $\text{Aff}(R)$ が取り上げられる。この群 $\text{Aff}(R)$ を関数 $\lambda \exp[ut]$ に作用させたとき (実は convex cone で考える) この結果を加法過程のレヴィ分解にもどして、ごく自然に重複度を導入しなければならないことに気づく。直感的に言えば、レヴィ過程を「分解するとき、強度は同じでも、スケールの違った素な成分が現れることがわかる。これは新しい観点と考える。結果は 2014 年 3 月、シンガポールで開催された国際研究集会 IDAQP and its Applications で招待講演として報告した。

5. 主な発表論文等

1. Si Si, A noise with the space parameter and invariance of the class of intensities, Infinite Dimensional Analysis and Quantum Probabilities, Vol 15 (2012) World Scientific Publ. 1250025, p 1-8.
2. Si Si, A Noise with space parameter and representation of $SL_2(R)$. 電子ジャーナル, 数理解析研究所, 京都大学 Soryusironkenkyu Vol. 13, No. 1, 266 - 275 (2012).
3. Si Si, New noise with space parameter and its application. Proceedings of the International Conference on "From Quantum Information to Bio-Informatics," Quantum Bio-Informatics V. QP-PQ, World Scientific Pub. 291-301, 2013.
4. Si Si, A New Noise with space parameter and its characteristic properties. Proceedings of 32nd International Conference on Quantum Probability and Related Topics, Trento, Italy. (accepted, to appear).
5. Si Si, Boundary of homogeneous chaos. Volterra publication, N. 640, 1-8, Feb. 2014 .
6. Si Si, Graded rings of Homogeneous Chaos generated by polynomials in noises depending on time and space parameters respectively, Volterra publication, 1-14, N. 638, 2014 .

6. その他

国際学会のオーガナイザー

International Workshop on IDAQP

Jan. 7-9, 2013 : 愛知県立大学

国際学会の副オーガナイザー

IDAQP and Applications

March 3-7, 2014, IMS

National Univ. of Singapore