科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２６ 年　 ５ 月　 １ 日現在

機関番号：２４４０３
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2011～2013
課題番号：２３５４０１５４

研究課題名（和文）共形ガリレイ代数の表現と直交多項式、量子多体系への応用

研究課題名（英文）Representation theories of conformal Galilei algebras and their applications to orthogonal polynomials and quantum many-body systems

研究代表者
会沢　成彦（AIZAWA, Naruhiko）

大阪府立大学・理学（系）研究科（研究院）・教授

研究者番号：７０２６４７８６

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　2,500,000円、（間接経費）　750,000円

研究成果の概要（和文）：時空の対称性は現代物理学におけるもっとも基本的な概念のひとつである．対称性を数学的に記述するために「リー代数」とその「表現」というものが用いられる．本研究ではリー代数の一種である共形ガリレイ代数(以下 CGA と略記する)とその表現について研究し，さまざまな成果を得た．まず，CGA を超対称性や質量を持つ系も記述できるよう拡張した新しいリー代数をいくつも発見した．それらの代数がどのような表現を持つのかを研究し，もっとも基本的な表現の分類などを行った．その応用として CGA を対称性として持つ微分方程式や，量子力学系を構成した．

研究成果の概要（英文）：Symmetries of space-time is one of the most fundamental notions in contemporary physics. Mathematically, symmetries are described by Lie algebras and their representations. The purposes of this project is to investigate the conformal Galilei algebras (CGA), a specific class of Lie algebras, and their representations. Main results are summarized as follows. Some extensions of CGA's such as supersymmetry (widest sense of symmetries) and central (system with mass). Classification of the most fundamental representations of the extended algebras and explicit construction of other types of representations. As applications of the representations, hierarchy of differential equations and a model of quantum many-body systems having CGA as a symmetry are derived.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・数学一般（含確率論・統計数学）

キーワード：リー代数の表現論　微分方程式の対称性　超対称リー代数　量子力学系

１．研究開始当初の背景

(1) ニュートン力学，あるいは非相対論的量子力学における基本的な時空の変換はガリレイ群で与えられる．すなわち，時間・空間における並進，空間回転およびガリレイ変換（等速運動している座標系への変換）である．しかし，自由粒子や調和振動子をはじめとして多く系は，ガリレイ群よりも多くの変換のもとで対称となる．そのため，ガリレイ群の拡張が 1970 年代より考えられている．ガリレイ群にスケール変換と共形変換を加えたものはシュレーディンガー群と呼ばれている．シュレーディンガー群をさらに拡張したものも議論されており，同じ群でも論文の著者により異なる呼称が与えられており，用語の統一もされていない状態であった．本研究ではシュレーディンガー群を部分群としてもつものを「共形ガリレイ群」と呼び，そのリー代数を「共形ガリレイ代数」と呼ぶことにしている．

(2) 2008 年にシュレーディンガー代数を用いて非相対論的 AdS/CFT 対応というものが提唱された．詳細は省くがこれはたいへん画期的なことであり，その後他の共形ガリレイ代数を用いて同様のことが提唱され，共形ガリレイ代数全体に対する興味が大きく湧き上がった．共形ガリレイ代数が注目を集めるようになったのが近年であること，また，共形ガリレイ代数は半単純でないことにより，共形ガリレイ代数の数学的にきちんとした研究，特に表現論はほとんど研究されていなかった．

２．研究の目的

前述のように，共形ガリレイ代数はいくつかの異なる代数（有限・無限次元の両方ある）の総称である．また，共形ガリレイ代数に含まれるあるひとつの代数から，幾通りかの異なる超対称化された代数が得られることが知られている．

本研究の目的は，共形ガリレイ代数とその超対称したものの表現論を発展させることと，得られた表現を用いて共形ガリレイ代数の数学の他の分野や理論物理への応用の可能性をさぐることである．特に次の事柄には力をいれたい．表現論に関しては既約表現の分類を与えること．数学的応用に関しては，直交多項式，微分方程式の対称性との関連を明らかにすること．物理的応用に関しては量子多体系との関連を明らかにすること．

３．研究の方法

本研究は数学と理論物理の研究であり，実験設備や大がかりな計算機システムを必要としない．手計算とパソコン上で動く数式処理ソフトを用いることにより研究は遂行される．

さて，本研究において重要なことは共形ガリレイ代数の表現の具体例をできるだけ多く求めることである．というのは，表現をいろいろな問題に応用するには，表現の具体形が必要不可欠だからである．この問題から研究を始めることにする．

既約表現の分類や数学的・物理的応用についていは，単純リー代数の場合(単純リー代数の表現論，応用はとてもよく研究されており，多くの知識が蓄積されている)，および，共形ガリレイ代数に関する先行研究を参考にすることにより研究を行う．

４．研究成果

(1) 共形ガリレイ代数は無限個の異なるリー代数の総称である．個々のリー代数を指定するには，有限次元の場合でも無限次元の場合でも，ふたつのパラメータ(d,ℓ)の値を指定すればよい．d は自然数に，ℓは正の整数または半整数に値をとる．超対称化された代数の場合には，さらに超対称変換の個数を与える自然数 N を指定する必要がある．注意しなければならないことは，同じ(d,ℓ,N)を持つが同値ではない超対称共形ガリレイ代数が複数存在することである．

(2) 有限次元共形ガリレイ代数の表現のうち，もっとも基本的な表現である最高（最低）ウエイト既約表現の分類を次の場合に完成させた．

① $(d,\ell,N)=(2,1,0)$

② d=1，N=0 かつ，任意の半整数ℓ

③ $\ell=1/2$ かつ，(d,N)が次の場合(1,1)，(2,1)，(1,2)，(2,2)

(3) d=2 かつ，ℓが整数である無限次元共形ガリレイ代数(N=0)について次の結果を得た．

① 中心拡大の分類に成功した．

② 最高ウエイト表現（Verma 加群）が既約，あるいはユニタリとなる条件を求めた．

③ $\ell=1$ の場合に，振動子代数による表現，coadjoint 表現を求めた．

④ $\ell=1$ の場合に中心拡大された共形ガリレイ群を定義し，その coadjoint 軌道を求めた．

(4) 有限次元代数の表現の具体例として次のようなものを得た．

① 次の$(d,\ell N)$に対するベクトル場表現
(1,半整数,0)，(2,半整数,0)，(1,1/2,1)，(1,1/2,2)

② N=2，任意の(d,ℓ)に対するハイゼンベルク超代数による表現，および，D-加群による表現

(5) N=2，任意の(d,ℓ)の場合に新しい超対称共形ガリレイ代数を発見した

(6) N=2，任意の(d,ℓ)の超対称共形ガリレイ代数を dynamical algebra として持つ量子多体系を構成した

(7) 任意の半整数ℓ，N=0，d=1,2 である共形ガリレイ代数を kinematical symmetry として持つ，偏微分方程式の階層を導出した．

(8) 共形ガリレイ代数は無限次元版や超対称化を含めると実にさまざまなリー代数の集合体であるといえる．それにもかかわらず，既約表現の分類といったような数学的な側面に関する研究はほとんどされていなかった(ℓ=1/2，N=0 かつ d=1,2,3 のみ論文があった)．本研究の成果(2)，(3)②により共形ガリレイ代数の表現論は大きく進歩したといえる．それだけではなく，成果(6),(7)により共形ガリレイ代数は偏微分方程式系や量子多体系と深い関係にあることも明らかになった．これらの成果は，他の研究者を刺激し，(2)②のより簡単な証明を与えた論文や，無限次元共形ガリレイ代数の超対称化と頂点作用素代数の関連を調べた論文などが出版されている．また,(4)②，(5)は本研究の成果に興味を持ったグループからの共同研究の申し出を受けたことにより生まれた成果である．この他にも共同研究の申し出があり，また，国際会議へ招待されるなど本研究の成果は学会の一部の注目を集めている．

(9) 本研究では 3 つのパラメータ(d,ℓ,N)のさまざまな組合せに対し個別撃破的にいろいろなことを調べ，成果を出した．個々の代数ごとにさまざまなことを調べるのは，代数の応用を考える際には必要不可欠であり，研究されねばならないことである．しかし，共形ガリレイ代数全体の表現を一括して扱う枠組みを見出すことは，理論を体系化するうえで必要なことにもかかわらず，そのような枠組みを見出すことには成功していない．これが今後取り組まなければならない大きな問題である．

また，細かいことになるが今後の課題として 2 点あげておく．ひとつめは，共形ガリレイ代数の表現と直交多項式の関係である．両者の間にはなんらかの関係があると信じているが，いまだ明らかになっていない．ふたつめは，N=4 の超対称共形ガリレイ代数の例を作ることと，その表現を調べることである．これらは物理的な重要性があると信じている．

共形ガリレイ代数はリー代数の一種であった．リー代数とリー群は切っても切れない関係にあること，リー群の数学的・物理的重要性を鑑みると，共形ガリレイ群の構造と表現を調べることが，今後進むべきもうひとつの方向であると思われる．

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　12 件）

① N. Aizawa, Z. Kuznetsova and F. Toppan,
Chiral and real N=2 supersymmetric ℓ-conformal Galilei algebras,
Journal of Mathematical Physics,
54 巻，2013 年，093506，査読有
DOI: 10.1063/1.4820481

② N. Aizawa, Y. Kimura and J. Segar,
Intertwining operators for ℓ-conformal Galilei algebras and hierarchy of invariant equations,
Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical，46 巻，2013 年，405204，
査読有，
DOI: 10.1088/1751-8113/46/40/405204

③ N. Aizawa,
N=2 Galilean superconformal algebras with a central extension,
Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical，45 巻，2012 年，475203,
査読有,
DOI: 10.1088/1751-8113/45/47/475203

④ N. Aizawa, P. S. Isaac and Y. Kimura,
Highest weight representations and Kac determinants for a class of conformal Galilei algebras with central extension,
International Journal of Mathematics,
23 巻，2012 年，1250118, 査読有,
DOI: 10.1142/S0129167X12501182

⑤ N. Aizawa,
Lowest weight representations of super Schrodinger algebras in one dimensional space,
Journal of Mathematical Physics,
52 巻，2011 年，013509, 査読有,
DOI: 10.1063/1.3533920

〔学会発表〕（計　10 件）

① N. Aizawa, Y. Kimura, J. Segar,
Representations of ℓ-cconformal Galilei algebra and hierarchy of invariant equation,
The 8th Symposium on Quantum Theory and Symmetries，2013 年 8 月 5 日，Mexico-City

② N. Aizawa,
Some representations of planar Galilean conformal algebra,
7th Mathematical Physics Meeting: Summer School and Conference on Modern

Mathematical Physics, 2012年9月14日, Belgrade, Serbia
③ N. Aizawa,
Galilean superconformal algebras with central extension and their realizations, XXIX International Colloquium on Group-Theoretical Methods in Physics, 2012年8月22日, Tianjin, China
④ N. Aizawa,
Some properties of planar Galilean conformal algebras,
IX. International Workshop "Lie Theory and Its Applications in Physics",
2011年6月22日, Varna, Bulgaria

〔図書〕(計　1件)
① N, Aizawa 他,
Institute of Physics, Belgrade,
Proceedings of 7th MATHEMATICAL PHYSICS MEETING:Summer School and Conference on Modern Mathematical Physics,
2013年, 393頁

〔その他〕
ホームページ等
http://www.mi.s.osakafu-u.ac.jp/~aizaw/CG/index.html

６．研究組織
(1)研究代表者
　会沢　成彦（AIZAWA　Naruhiko）
　大阪府立大学・理学系研究科・教授
　研究者番号：７０２６４７８６

研究協力者（海外共同研究者）
Phillip S. Isaac,
School of Mathematics and Physics,
The University of Queensland, Australia