

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 9 日現在

機関番号：32615

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2011～2013

課題番号：23540158

研究課題名(和文)多値論理における交換可能性の理論と極小クローン

研究課題名(英文)Theory of commutation and minimal clones in multiple-valued logic

研究代表者

町田 元 (MACHIDA, Hajime)

国際基督教大学・アーツ・サイエンス研究科・研究員

研究者番号：40090534

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,800,000円、(間接経費) 1,140,000円

研究成果の概要(和文)：集合Aの上で定義される多変数関数の集合で、関数の合成に関して閉じていて、射影関数をすべて含むものをA上のクローンという。A上のクローンの全体は束の構造をもつが、Aの要素数が2の場合を除き、クローン束の構造は極めて複雑で、まだほとんど解明されていない。

関数の可換性に基づいて中心可能クローンという概念が定義され、さらに、そのうちの1変数関数のみを取り出すことで中心可能モノイドが定義される。本研究では、3値の場合について、中心可能モノイドをすべて決定し、それらの間の包含関係を決定した。また、極大中心可能モノイドと極小クローンを生成する多数決関数との関係についても研究を進めた。

研究成果の概要(英文)：A set of multi-variable functions defined on a given set A is a clone on A if it is closed under functional composition and contains all projections on A. The set of clones on A forms a lattice. Except the case for $|A|=2$, the structure of the clone lattice on A is extremely complex and, until now, mostly unknown.

Based on the commutativity of functions the notion of a centralizer (centralizing clone) is defined and, furthermore, a centralizing monoid is defined as the set of unary functions of a centralizer. In this project, for the case of $|A|=3$, we determined all centralizing monoids on A as well as the inclusion relations among them. We also investigated the relation between maximal centralizing monoids and majority functions which generate minimal clones.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・数学一般(含確率論・統計数学)

キーワード：多値論理 普遍代数 離散数学

1. 研究開始当初の背景

集合 A の上で定義される多変数関数の集合で、(関数の)合成に関して閉じていて、さらに射影関数をすべて含むものを A 上のクローン (clone) という。 A 上のクローンの全体は、包含関係に関して、束の構造をもつ。 $|A|=2$ のとき、 A 上のクローン束の濃度は可算濃度であり、束の構造もすべて分かっている (E. Post, 1941)。しかし、 $|A|>2$ の場合にはクローン束の濃度は連続濃度であり、束の構造は、 $|A|=3$ の場合でさえ、まだほとんど解明されていない。

本研究は、普遍代数や多値論理の分野で重要な位置を占めるクローン理論に属す研究である。

クローン束の atom を極小クローンといい、coatom を極大クローンという。任意の有限集合 A ($|A|>1$) に対する極大クローンの分類は、I. G. Rosenberg (1971) の 90 ページに及ぶ論文により完成しているが、一方、極小クローンについては、わずかに $|A|=2, 3$ の場合に対して、すべての極小クローンが決定されているに過ぎない。(ただし、 $|A|=4$ の場合の極小クローンの決定がすべて完成したという K. Schoelzel の報告がある (2013, 論文未発表)。) 極大クローンと極小クローンの中間に位置する部分については、 $|A|=3$ の場合でも、まだほとんど何も分かっていないというのが、クローン理論研究の現状である。

本研究では、関数の交換可能性に基づいて定義される中心可能クローンや中心可能モノイドを対象とする研究を行った。われわれの研究開始の時点では、主に中欧や東欧の一部の研究者による研究を除いて、 $|A|=3$ の場合でも、中心可能クローンや中心可能モノイドの統一的な研究はほとんど行われていないという状況であった。

2. 研究の目的

1 変数関数に対する可換性の概念を自然に拡張して、一般に、 m 変数関数 f と n 変数関数 g ($m, n > 0$) に対して、 f と g の可換性を定義することができる。この可換性の定義に基づき、中心可能クローンの概念を定義する。すなわち、 A 上の (多変数) 関数の集合 F に対し、 F に属すすべての関数と可換な (多変数) 関数全体からなる集合を F^* と記す。 F^* は常にクローンになる。 F^* を F の中心可能クローン (centralizer) という。さらに、中心可能クローンの 1 変数関数のみからなる部分集合を考えると、これは明らかにモノイドの構造をもつ。これを中心可能モノイド (centralizing monoid) とよぶ。

事前の研究により、とくに $|A|=3$ の場合に、中心可能モノイドと極小クローンの間に密接な関係が存在しそうなことが推測されていた。

本研究の研究目的は、(i) 極大中心可能モノイドと極小クローンの関係の解明、(ii) 極

大中心可能モノイドの分類、(iii) 中心可能モノイドの分類、および、(iv) 中心可能クローンの分類である。

3. 研究の方法

集合 A 上の関数の集合 S に対し、 S のすべての要素と交換可能な 1 変数関数の全体を M とすると、 M は中心可能モノイドである。 S を M の証人集合 (witness) とよぶ。一般に、「極大な」中心可能モノイドはある極小クローンの生成元のみからなる証人集合をもつという性質を証明することができる。

われわれの研究の方法は、証人集合を媒介として極大中心可能モノイドの決定、分類を行うというものであった。 $|A|=3$ の場合の研究では、B. Csakany による 3 値の極小クローンの分類結果 (1983) が有効に利用され、この分類を利用して 3 値の場合の極大中心可能モノイドの分類を完成させることができた。

一方、極大中心可能モノイドと極小クローンの関係の解明という大変魅力的な研究課題については、 $|A|=3$ の場合の両者の関連について、その関連の見通しのよい解明を求めることから研究に着手するという方法をとった。

4. 研究成果

極大中心可能モノイドの分類という課題を研究テーマの一つとして掲げたが、3 値 ($|A|=3$) の場合について、極大中心可能モノイドのみならず、すべての中心可能モノイドを決定するという成果をあげることができた。3 値の中心可能モノイドの総数は 192 個 (共役を除いた中心可能モノイドの個数は 48 個) であり、そのうち、極大中心可能モノイドの個数は 10 個である。また、極大中心可能モノイドの要素数の最大値は 17 である。3 値の中心可能モノイド全体について、それらの間の包含関係もすべて決定した。

また、もう一つの重要な研究テーマである極大中心可能モノイドと極小クローンの関係の解明についても研究を進めた。3 値 ($|A|=3$) の場合、1 変数関数からなるモノイドが極大中心可能モノイドであるための必要十分条件として、そのモノイドが定数関数または極小クローンを生成する majority 関数を証人集合としてもつことである、という性質を示すことができた。とりわけ、極大中心可能モノイドと majority 関数の関係は極めて興味深いものである。この結果の一般化 ($|A|>3$ の場合への拡張) の可否について検討を進めた。このテーマについては、極小クローンに造詣の深い T. Waldhauser 博士の助力も得て検討を行ったが、5 値以上では極小クローンを生成する majority 関数の決定自体が未完成ということもあり、研究はまだ明確な結果を得るには至らず、現在進行中の段階である。

なお、当初の研究目的の一つであった中心

可能クローンの分類については、3 値に限定した場合でも、対象が広範であり過ぎることもあって、遺憾ながら、まだほとんど研究が進んでいない。

3 値の極大中心可能モノイドの分類の研究では、3 値の極小クローンの分類の知識が有効に用いられた。これに触発されて、本質的極小クローンの研究も行った。本質的極小クローンとは、クローン束のうち本質的 1 変数関数のみからなるクローンをすべて除いて得られる半順序集合において極小元となるクローンのことである。3 値の場合、ランクが 2 と 3 の本質的極小クローンが存在するが、本研究では、それらの本質的極小クローンをすべて決定した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 19 件)

J. Colic, H. Machida and J. Pantovic, Upward saturated hyperclones, *Journal of Multiple-Valued Logic and Soft Computing*, 査読有, 掲載決定.

H. Machida and J. Pantovic, Galois connections arising in clone theory, 京都大学数理解析研究所, 査読無, Vol. 1873, 2014, 75--81.

H. Machida and I. G. Rosenberg, Essentially minimal clones of rank 3 on a three-element set, *Proc. 44th International Symposium on Multiple-Valued Logic*, IEEE, 査読有, 2014.

J. Colic, H. Machida and J. Pantovic, One-point extension of the algebra of incompletely specified operations, *Journal of Multiple-Valued Logic and Soft Computing*, 査読有, Vol. 22, 2014, 79--94.

H. Machida and I. G. Rosenberg, Report on centralizing monoids on a three-element set, 京都大学数理解析研究所講究録, 査読無, Vol. 1846, 2013, 53--65.

J. Colic, H. Machida and J. Pantovic, On Hyper Co-clones, *Proc. 43rd International Symposium on Multiple-Valued Logic*, IEEE, 査読有, 2013, 182--185.

H. Machida and I. G. Rosenberg, A Study on essentially minimal clones, *Proc. 43rd International Symposium on Multiple-Valued Logic*, IEEE, 査読有, 2013, 117--122.

H. Machida and I. G. Rosenberg, Centralizing monoids with minimal function witnesses on a three-element set, 京都大学数理解析研究所講究録, 査読無, Vol. 1809, 2012, 171--180.

H. Machida and T. Hikita, Honouring Ivo

G. Rosenberg: His contributions to ISMVL, *Proc. 42nd International Symposium on Multiple-Valued Logic*, IEEE, 査読有, 2012, 322--330.

H. Machida and I. G. Rosenberg, Centralizing monoids on a three-element set, *Proc. 42nd International Symposium on Multiple-Valued Logic*, IEEE, 査読有, 2012, 274--280.

J. Colic, H. Machida and J. Pantovic, Clones of incompletely specified operations, *Proc. 42nd International Symposium on Multiple-Valued Logic*, IEEE, 査読有, 2012, 256--261.

H. Machida, J. Pantovic and I. G. Rosenberg, Regular sets of operations, *Journal of Multiple-Valued Logic and Soft Computing*, 査読有, Vol. 19, 2012, 149--162.

H. Machida and I. G. Rosenberg, Some centralizing monoids on a three-element set, *Journal of Multiple-Valued Logic and Soft Computing*, 査読有, Vol. 18, 2012, 211--221.

H. Machida and J. Pantovic, Three classes of maximal hyperclones, *Journal of Multiple-Valued Logic and Soft Computing*, 査読有, Vol. 18, 2012, 201--210.

H. Machida, Maximal centralizing monoids and minimal clones, 京都大学数理解析研究所講究録, 査読無, Vol. 1769, 2011, 144--152.

H. Machida, L. Haddad and J. Pantovic, Invitation to clone theory with partial clones and hyperclones, *Proc. 41st International Symposium on Multiple-Valued Logic*, IEEE, 査読有, Vol.41, 2011, 205--212.

J. Colic, H. Machida and J. Pantovic, Maximal hyperclones determined by monotone operations, *Proc. 41st International Symposium on Multiple-Valued Logic*, IEEE, 査読有, Vol.41, 2011, 160--163.

H. Machida and I. G. Rosenberg, Maximal centralizing monoids and their relation to minimal clones, *Proc. 41st International Symposium on Multiple-Valued Logic*, IEEE, 査読有, Vol.41, 2011, 153--159.

I. Chajda, R. Halas and H. Machida, Completeness of order algebras, *Journal of Multiple-Valued Logic and Soft Computing*, 査読有, Vol.17, 2011, 93-98.

[学会発表](計 17 件)

H. Machida, "Essentially minimal clones of rank 3 on E_3 ", 87th Work-

shop on General Algebra (AAA87), February 8, 2014, Linz, Austria.

H. Machida, "Remarks on essentially minimal clones", Kangro-100: Methods of Analysis and Algebra, International Conference dedicated to the Centennial of Professor Gunnar Kangro, September 3, 2013, Tartu, Estonia.

H. Machida, "On Hyper Co-clones", Forty Third International Symposium on Multiple-Valued Logic, May 23, 2013, Toyama, Japan.

H. Machida, "A Study on Essentially Minimal Clones", Forty Third International Symposium on Multiple-Valued Logic, May 22, 2013, Toyama, Japan.

H. Machida, "Some remarks on essentially minimal clones", 85th Workshop on General Algebra (AAA85), February 1, 2013, Luxembourg.

H. Machida, "Essentially minimal clones on a three-element set", The 50th Summer School on Algebra and Ordered Sets (SSAOS), September 4, 2012, Novy Smokovec, Slovakia.

H. Machida, "Minimal clones and maximal centralizing monoids", Conference on Universal Algebra and Lattice Theory: Dedicated to the 80-th Birthday of Bela Csakany, June 23, 2012, Szeged, Hungary.

H. Machida, "Honouring Ivo G. Rosenberg: His contributions to ISML" (Invited Talk), Forty Second International Symposium on Multiple-Valued Logic, May 16, 2012, Victoria, Canada.

H. Machida, "Centralizing monoids on a three-element set", Forty Second International Symposium on Multiple-Valued Logic, May 16, 2012, Victoria, Canada.

J. Pantovic, "Clones of incompletely specified operations", Forty Second International Symposium on Multiple-Valued Logic, May 15, 2012, Victoria, Canada.

H. Machida, "Centralizing monoids, again!", Wiener Algebra Seminar (ウィーン工科大学), March 23, 2012, Wien, Austria.

H. Machida, "Centralizing monoids on a three-element set", 83rd Workshop on General Algebra (AAA83), March 16, 2012, Novi Sad, Serbia.

H. Machida, "Commutation on a finite set", Summer School on General Algebra and Ordered Sets (SSAOS), September 5, 2011, Svratka, Czech

Republic.

H. Machida, "Maximal centralizing monoids and minimal clones", Wiener Algebra Seminar (ウィーン工科大学), May 27, 2011, Wien, Austria.

H. Machida, "Invitation to clone theory with partial clones and hyperclones" (Invited Lecture), Forty First International Symposium on Multiple-Valued Logic, May 24, 2011, Tuusula, Finland.

H. Machida, "Maximal centralizing monoids and their relation to minimal clones", Forty First International Symposium on Multiple-Valued Logic, May 24, 2011, Tuusula, Finland.

J. Pantovic, "Maximal hyperclones determined by monotone operations", Forty First International Symposium on Multiple-Valued Logic, May 24, 2011, Tuusula, Finland.

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕
出願状況(計 0 件)

取得状況(計 0 件)

〔その他〕
ホームページ等
なし

6. 研究組織

(1) 研究代表者

町田 元 (MACHIDA, Hajime)

国際基督教大学・アーツ・サイエンス研究
科・研究員

研究者番号: 40090534

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

なし