様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２６ 年　 ６ 月 ２３ 日現在

機関番号： ３２７０６
研究種目： 基盤研究(C)
研究期間： 2011～2013
課題番号： ２３５４０１６８

研究課題名（和文） ラムゼー型分割問題の研究

研究課題名（英文） Study of Ramsey-type decomposition problems

研究代表者
中上川　友樹（Nakamigawa, Tomoki）

湘南工科大学・工学部・准教授

研究者番号：２０３８６８９０

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 900,000円、**（間接経費）** 270,000円

研究成果の概要（和文）：離散数学・組合せ論におけるラムゼー型問題とは、「どのような無秩序な構造もそれが十分に大きければ、ある秩序を持った部分構造を持つ」という主張がさまざまな条件下において成立するか否かを決定することである。
本研究で導入されたラムゼー型分割問題とは、このラムゼー型問題と深く関連して「どのような無秩序な構造もそれが十分に大きければ、その構造のある秩序を持った分割が存在する」という主張を検討することである。本研究では、グラフを中心とするいくつかの離散構造についてラムゼー型分割問題に関する定理を得た。

研究成果の概要（英文）：Ramsey-type problems in discrete mathematics and combinatorics are to determine whether the following claims hold or not in various situations; any sufficiently large structure, however it is in disorder, has a local structure that is in order.
In this study, Ramsey-type partition problems are introduced. They are deeply connected with Ramsey-type problems, and our aim is to investigate the following claim; any sufficiently large structure, however it is in disorder, admits a partition that is in order. We have shown some theorems for the Ramsey-type partition problems of some discrete structures, such as graphs.

研究分野： 数物系科学

科研費の分科・細目： 数学・数学一般

キーワード： ラムゼー理論　極値グラフ理論　グラフ分割　誘導部分グラフ

１．研究開始当初の背景

ラムゼー理論は「完全な無秩序は不可能である」という主張をさまざまなモデルで数学的に検証する理論である．それは，現在，幅広く研究されており離散数学の一分野を形成している．最も代表的な問題としては，2辺着色完全グラフにおけるラムゼー数を決定する問題がある．近年，本研究代表者により，ラムゼー型問題の一変種として，基礎となる離散構造のある良い性質を持つ分割の存在を主張するような問題―ラムゼー型分割問題と呼ぶ―の研究が開始されていた．研究開始時に得られていた主な結果を以下に述べる．ここで，以下に現れる着色点集合なる用語の定義を述べる．X を有限集合とする．X から正の整数全体 N への関数 ϕ を X の着色と呼び，(X,ϕ) を着色点集合と呼ぶ．X の位数を (X,ϕ) の位数と呼ぶ．2つの着色点集合 (X_1,ϕ_1) と (X_2,ϕ_2) が互いに同型であるとは，N から N へのある全単射写像 σ が存在して，任意の正の整数 y について $|\phi_1^{-1}(y)| = |\phi_2^{-1}(\sigma(y))|$ が成り立つことと定義する．

(1) n を正の整数とする．頂点数 $(14/3)n + O(1)$ の任意のグラフは，n 個の互いに同型かつ点素な頂点数３の誘導部分グラフを含む．

(2) k,m を $m \geqq k-2$ を満たす正の整数とする．位数 $(k+1)m-1$ 以上の任意の着色点集合は，m 個の互いに同型かつ点素な位数 k の着色点集合を含む．

(3) k,m を正の整数とする．位数 km の任意の着色点集合 X に対して，位数 k の着色点集合のペア Y_1, Y_2 と X の分割 $X = X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_n$ が存在して，各 X_i は Y_1 または Y_2 と同型になる．

２．研究の目的

本研究の目的は，前節で述べた研究をさらに進展させることである．

(1) グラフの分割問題

与えられたグラフ G の中に互いに同型かつ点素な誘導部分グラフ H を多数見出だすような問題を研究する．

(2) 着色点集合の分割問題

分割条件の変更により新たな興味深い問題が生まれうる．例えば，分割において各部分 X_i がいくつかの所与の着色点集合と同値となる条件を付加した場合について研究する．

(3) 一般の離散構造

グラフ，着色点集合に限定せず，一般の離散構造に対する問題設定を行なう．

３．研究の方法

従来の結果を拡張する条件，または類似の条件下での命題を見出だし証明する．

(1) 証明技法

本研究は，ラムゼー型問題あるいは極値問題の一変種であるため，それらの既存研究に現れる議論が用いられる．例えば，「研究開始当初の背景」の (1) で述べた結果，およびそれを拡張した結果の証明には，補題として完全グラフに関するラムゼーの定理が直接使われている．一方，本研究では，極値の上界の評価の際に，先行論文には見られないアイデアを用いている．それは，Burr-Erdős-Spencer **の定理における "bowtie argument" を一般化した手法であるが，これは本研究で新たに導入された手法である．**

(2) 計算機による実験

極値の下界を決定するためには，ある性質のよい配置を1つ見つけることが必要となる．このために計算機による実験が有効となる．例えば，「研究開始当初の背景」の (1) で述べた結果に関連した次の予想がある； 頂点数 $6n + O(1)$ の任意のグラフは，n 個の互いに同型かつ点素

な頂点数 4 の誘導部分グラフを含む. この予想は計算機実験により正しいことが示唆されている.

4．研究成果

(1) 誘導部分グラフの点素なコピーに関するラムゼー型分割問題

G,H を多重辺やループを持たない無向グラフとする. グラフ G の頂点集合, 辺集合をそれぞれ V(G), E(G) と書く. U ⊂ V(G) について U によって誘導される G の誘導部分グラフを G[U] と表わす. G が含みうる互いに点素な H と同型である誘導部分グラフの最大個数を N(G,H) とする. つまり, N(G,H) = max { n : ある分割 $V(G) = V_0 \cup V_1 \cup \cdots \cup V_n$ が存在して i = 1,...,n について $G[V_i]$ は H と同型} である. **H** がグラフの族であるとき N(G, **H**) = max { N(G,H) : H∈ **H** } と定義する. さらに f(n, **H**) = min { s: 頂点数が s 以上のすべてのグラフ G について N(G, **H**) ≧ n } と定義する. 本研究では, 次の結果を得た;
1 ≦ m ≦ k-2 について, K_m と K_{k-m} の補グラフの結合グラフを $B_{k,m}$ と書く. さらに, $\mathbf{B}_{k,m}$ = { K_k, K_k の補グラフ, $B_{k,m}$, $B_{k,m}$ の補グラフ } と定義する. 1 ≦ m ≦ k − 2 とする.
このとき $f(n, \mathbf{B}_{k,m}) = (2k - 1 - m/k) n + O(1)$.

この定理において, k＝3, m=1 の場合には「研究開始当初の背景」の (1) で述べた結果となる. H を k 頂点のグラフとし, **H** = { K_k, K_k の補グラフ, H, H の補グラフ } と定義する. このとき, H が $B_{k,m}$ 及びその補グラフの形でなければ, f(n, **H**) = (2k − 1)n + O(1) であることは容易にわかるため, 漸近的にはすべての H について f(n, **H**) を決定できたことになる.

本結果については, その部分的な結果を含めて, 3 回の国内研究集会で発表した (日本数学会:2011 年 9 月, 関西グラフ理論研究集会: 2012 年 3 月, 日本数学会:2012 年 9 月). また, 国際会議としては, 2013 年 7 月にブダペストで開催されたエルデシュ生誕百周年記念会議のポスターセッションにて発表し, 複数の海外研究者と質疑, 議論を行なった. また, 論文が論文誌 Discussiones Mathematicae Graph Theory に掲載された. 今後研究すべき未解決問題としては, G_k = { k 頂点からなるグラフ全体} とするとき, f(n, $\mathbf{G}_k$) を漸近的に決定することが挙げられる. 特に, k=4 の場合に, $f(n,G_4) = 6n + O(1)$ と予想しおり, その解決が次の主要な目標である.

(2) グラフの頂点集合の等分割に関する問題

k, m ≧ 1 とする. H を頂点数 k のグラフ, G を頂点数 n = km のグラフとする.
G の頂点集合を m 個の k 点集合に分割するとき, 各 k 点集合により誘導される m 個の部分グラフのうち, どのくらいの個数が H と同型になるかを考える. H の G における点素個数範囲 I(G,H) を I(G,H) = { 0 ≦ s ≦ m : ある分割 $V(G) = V_1 \cup \cdots \cup V_m$ が存在して, 1 ≦ i ≦ m についての m 個の $G[V_i]$ のうち, ちょうど s 個が H と同型である} と定義する.
さらに, H の G における最小点素個数 m(G,H) = min I(G,H), 最大点素個数 M(G,H) = max I(G,H), 最小点素個数 m(G,H) = min I(G,H) を定義する.

本研究では, 主に H が完全グラフおよび完全 2 部グラフの場合について I(G,H), M(G,H), m(G,H) の性質を調べた. 本研究の内容は, 2012 年 12 月の応用数学合同研究集会で発表した. 今後解かれるべき予想として, 次の予想がある; G を頂点数 2k のグラフ, H は頂点数 k の連結グラフであり, H ≠ K_k, $K_{1,k-1}$, $K_{2,3}$ とする. このとき, m(G,H) = 0 が成り立つ. なお, 本研究において H が完全 2 部グラフの場合には上記予想が成り立つことを証明した.

(3) 完全多部グラフの分割問題

完全多部グラフの分割に関して次の結果を証明した.
k, m を正の整数, G を頂点数 n = km の完

全多部グラフとする. m ≧ k－2 とする. このとき, G の頂点を m 等分して, それぞれの部分が誘導する k 頂点の部分グラフが, (1) 完全グラフ, (2) 空グラフ, (3) 完全グラフと空グラフの結合グラフ, のいずれかと同型にすることができる. 類似の結果と合わせて, 2013 年 9 月に東京で開催された国際会議(江川嘉美先生還暦記念グラフ理論研究集会)で発表した. また, 論文としてまとめ, 現在投稿中である. なお, この問題は着色点集合の言葉に言い換えることができる.

（4） その他の離散数学関連の研究

その他の離散数学に関して得られた結果として, **グラフ上の石交換に関する研究論文，格子路の数え上げに関する研究論文，および階層型ネットワークの連結性に関する研究論文が刊行された.**

５．主な発表論文等

〔**雑誌論文**〕（計 5 件）

① S. Fujita, T. Nakamigawa and T. Sakuma, "Colored pebble motion on graphs ", European J. Combinatorics 33 (2012), pp. 884-892.

② T. Nakamigawa and N. Tokushige, "Counting lattice paths via a new cycle lemma", SIAM J. Discrete Math. 26 (2012), pp. 745-754.

③ T. Takabatake and T. Nakamigawa, “Nodedisjoint paths in a level block of Generalized hierarchical completely-connected networks”, Theoretical Computer Science, 465 (2012), pp.28-34.

④ S. Fujita, T. Nakamigawa and T. Sakuma, "Pebble exchange on graphs", Discrete Applied Mathematics, Available online 29 March 2013, doi: 10.1016/j.dam.2013.03.009.

⑤ T. Nakamigawa, "A Ramsey-type theorem for multiple disjoint copies of induced subgraphs", Discussiones Mathematicae Graph Theory, 34(2014), pp.249-261.

〔**学会発表**〕（計 9 件）

① 中上川 友樹, グラフの点素かつ同型な誘導部分グラフ, 日本数学会秋季総合分科会応用数学分科会, 2011 年 9 月, 信州大学松本キャンパス.

② 中上川 友樹, グラフ上の石交換, 応用数学合同研究集会, 2011 年 12 月, 龍谷大学瀬田キャンパス.

③ 中上川 友樹, 誘導部分グラフの点素なコピーについて, 渡辺守先生ご退職記念関西グラフ理論研究集会, 2012 年 3 月, 加計国際学術交流センター.

④ 中上川 友樹, **グラフ上の石移動と石交換, RIMS 共同研究『デザイン，符号，グラフおよびその周辺』，2012 年 7 月，京都大学数理解析研究所.**

⑤ 中上川 友樹, 誘導部分グラフの点素なコピーに関するラムゼー型問題, 日本数学会 2012 年度秋季総合分科会, 2012 年 9 月, 九州大学.

⑥ **T. Takabatake and T. Nakamigawa, Hamiltonian path in generalized hierarchical completely-connected networks, The 3rd International Conference on Mathematical Models for Engineering Science, Paris, France, Dec. 2012.**

⑦ 中上川 友樹, グラフの頂点集合の分割に関する問題, 応用数学合同研究集会, 2012 年 12 月, 龍谷大学瀬田キャンパス.

⑧ **T. Nakamigawa, A Ramsey-type Theorem for Multiple Disjoint Copies of Induced Subgraphs (Extended Abstract) , Electronic Notes in Discrete**

Mathematics, Vol. 43 (Erdős Centennial), Jul. 2013.

⑨ T. Nakamigawa, An extremal problem for vertex decomposition of complete multipartite graphs, Graph Theory Conference in honor of Yoshimi Egawa on the occasion of his 60th birthday, Sep. 2013.

〔その他〕

湘南工科大学ホームページの教員情報
http://www.shonan-it.ac.jp/contents/teachers/information/t-nakamigawa/index.html
（湘南工科大学ホームページ>学部・大学院>工学部>情報工学科>教員情報>中上川友樹准教授）
により，刊行された研究論文が検索できる．

6．研究組織

(1)研究代表者

中上川　友樹（NAKAMIGAWA, Tomoki）
湘南工科大学・工学部・准教授
研究者番号：20386890

(2)研究分担者

なし

(3)連携研究者

なし