

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 5 月 18 日現在

機関番号：35302

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2011～2014

課題番号：23540173

研究課題名(和文) 逆問題の解の直接的再構成法とその数値的実装に関する研究

研究課題名(英文) Studies on direct reconstruction methods and their numerical implementations for the solution of some inverse problems for partial differential equations

研究代表者

大江 貴司(OHE, TAKASHI)

岡山理科大学・理学部・教授

研究者番号：90258210

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円

研究成果の概要(和文)：本研究課題では、偏微分方程式の逆問題のうち、主として波動方程式のソース逆問題および Helmholtz 方程式の境界逆問題について、その解の直接的構成法を研究すると共に、その数値的実装法の開発を行った。波動方程式のソース逆問題については3種類の reciprocity gap functional を利用することにより、(a)固定された点波源、(b)移動する点波源、および(c)ゆっくり移動する双極子波源の直接的数値解法を開発した。また Helmholtz 方程式の境界逆問題について、囲い込み法における指示関数の対数微分を利用する解法を開発し、その数値的特性について詳細な分析を行った。

研究成果の概要(英文)：In this research project, we mainly study direct numerical reconstruction method for inverse source problems for three-dimensional scalar wave equation, and inverse scattering problem for the Helmholtz equation. For inverse source problems for three-dimensional scalar wave equation, we develop numerical reconstruction methods for (a) fixed point wave sources, (b) moving point wave sources, and (c) slowly-moving dipole wave sources applying three types of reciprocity gap functionals. We examine our method by some numerical experiments, and found that our method gives precise estimates for unknown sources.

For inverse scattering problem for the Helmholtz equation, we develop an enclosure method based on the logarithmic differential of the indicator function. We investigate the details of behaviors of the logarithmic differential of the indicator function, and show the effectiveness of our method for the estimation of the convex hull of unknown obstacles from both far and near field data.

研究分野：応用数学・数値解析

キーワード：逆問題 偏微分方程式 数値解法 数値解析 応用数学

1. 研究開始当初の背景

偏微分方程式の逆問題に関する研究は問題そのものに対する数学的興味のみならず、工学・医学など他分野への数多くの応用を持つことから各方面から注目されている。中でも数値解法に関する研究は、応用分野に現れる問題を実際に解く上で必要となることから重要なものとなっている。逆問題の数値解法に関する研究は、2000年以前は有限差分法や有限要素法など偏微分方程式の順問題としての数値解法と非線形最適化法を組み合わせた手法が主として研究されてきた。この手法は観測データから逆問題の解を直接に求めるものではなく、順問題の数値解と観測データとが一致するように逆問題の解を調整するものであり、いわば間接的な手法であった。

これに対し2000年ごろより、観測データから逆問題の解を直接的に構成する、もしくは解に関する情報を直接的に得る手法に関する研究が理論面から進められた。例えば、Poisson方程式のソース逆問題に対しEl Badiaらがreciprocity gap functionalを利用した手法を、Helmholtz方程式の境界逆問題に対しKirschらがfactorization methodを、またPotthastらがsingular sources methodを提案している。国内でも研究代表者の大江らがPoisson方程式のソース逆問題に対し重み付き境界積分を利用した手法を、研究分担者の池島がLaplace方程式やHelmholtz方程式における境界逆問題に対し囲い込み法(enclosure method)や探針法(probe method)を提案している。逆問題の数値解法として、これらの理論的な結果に基づいた手法の研究も進みつつあるが、いくつかの問題点が指摘されていた。

問題点は次の2点に大別される。一つは手法の多くにおいて、解の再構成公式の表現が数学的な極限操作を含んでいる点である。したがって、これらの手法を数値的に実現するには公式の持つ極限操作を有限の立場で近似する数値的手法が必要となる。現在までいくつかの方法が提案されているが、その正当性の評価等に関する研究は今のところ進展はみられていない。

もう一つは解の不安定性の問題である。逆問題の多くは非適切問題として知られており、特に不安定性、すなわち観測データの変化に対する解の非連続性は数値解法において大きな問題となっていた。その対策の代表的なものとしてはTikhonovの正則化法や特異値分解法が知られているが、これらの方法は対象とする逆問題が線形もしくはそれに近く、また何らかの評価関数を最適化するパラメータを推定する手法、すなわち間接的な手法を対象としたものであった。したがって、直接的な手法への適用は困難であり、直接的再構成法に対する正則化法については、さらなる検討が必要な状況であった。

2. 研究の目的

1に示した背景の元、本研究課題では偏微分方程式の逆問題について、新たな解の直接的構成法およびその数値的実装法について研究し、高精度の偏微分方程式の逆問題の数値解法を開発することを目標として研究を行った。特に囲い込み法および重み付き境界積分に基づく解の再構成法とその数値的実装法について考察し、得られる解の理論的正当性を保証した数値解法の実装を開発を目標とした。さらに数値実験等を通して手法の有効性や問題点を洗い出し、理論解析へフィードバックと共に新たな再構成法の開発へとつなげ、理論解析と数値解析を融合した逆問題の解法に関する研究の展開を目指した。

特に、

(ア) 囲い込み法の持つ極限操作の数値的近似法とその正則化

(イ) 重み付き境界積分に基づく手法における重み関数の系統的構成法を取り上げ、上記の目標を視野に入れて研究を進めた。

3. 研究の方法

本研究課題では2に示した目標のため、具体的な偏微分方程式としてHelmholtz方程式や波動方程式など工学や医学への応用場でよく現れる方程式を取り上げ、特に

(ア) Helmholtz方程式の境界逆問題に対する囲い込み法に基づく数値解法

(イ) 波動方程式のソース逆問題の直接的数値解法

に対する研究を中心に行った。

まず(ア)に対しては、問題点が明らかになりつつあった囲い込み法の持つ数学的極限操作の有限の立場での近似手法について研究した。囲い込み法は「指示関数」と呼ばれる関数を定義し、関数に含まれるあるパラメータの値を無限に大きくしたときの漸近挙動に基づいて逆問題の解の再構成を行う。研究代表者の大江と分担者の池島はこの手法に基づいた数値的実装法として、パラメータの値を有限の範囲で可能な限り大きくして得られた数値的挙動をもとに無限に大きくした場合の漸近挙動を推定するという手法を提案している。この方法は囲い込み法の再構成法を直接実装したものであり、ある程度良い結果が得られている反面、有限の範囲で打ち切ることによる漸近挙動の予測値の妥当性や近似誤差の評価に関する検討はあまり進んでいなかった。この問題点について研究代表者の大江が数値解析の立場から、また研究分担者の池島が理論解析の立場から検討し、得られた知見をもとに、より数値的実装に適した「指示関数」の開発やそれに基づく再構成法の研究を進めた。

次に(イ)に対しては、まず地震波や電磁波の発生源の推定問題を想定し、強度は変化するが位置は固定されている複数の点状波源

について、その位置と強度を推定する問題について、重み付き境界積分に基づく直接的再構成法とその数値的実装法の研究を行った。この問題に対しては、El-Badia らによる Reciprocity gap functional を用いた解法が知られていたが、長い時間の観測値から、その時間に対応する点状波源の強度の Laplace 変換を求めるものであり、即時性に欠ける点が問題となっていた。さらに実際の数値的実装では逆 Laplace 変換を数値的に行う必要があり、数値的に不安定な手法であった。

これら問題点を解決するためには、Reciprocity gap functional の定義に現れる積分核、すなわち積分の重み関数について考察を深める必要がある。目標としては解の再構成において逆 Laplace 変換を必要としないような積分の重み関数を検討し、解の再構成法の数値的実装について研究を進めた。さらに、自動車のような移動する点状波源の位置を追跡する手法、またアンテナやスピーカーのような指向性を持つソース項の一種である双極子波源について、その双極子モーメントを推定する手法について研究を進めた。

4. 研究成果

本研究課題では偏微分方程式の逆問題の解の直接的再構成法、特に

(ア) Helmholtz 方程式の境界逆問題に対する囲い込み法に基づく数値解法

(イ) 波動方程式のソース逆問題の直接的数値解法

に対し、下記の研究成果を得ることができた。

(ア) Helmholtz 方程式の境界逆問題に対する囲い込み法に基づく数値解法

まず、推定対象の介在物が多角形状の場合に対する囲い込み法に対しこれまでのように指示関数を直接使うのではなく、その対数微分を利用する推定法を開発した。さらに開発した手法の数値的実装を行い、数値実験によりその特性について検討を行った。その結果、散乱データが誤差を含まない場合には、Near Field データおよび Far Field データからいずれも精度よく介在物の存在位置と形状を推定することができることがわかった。反面、データがノイズ等の誤差を含む場合には、Near Field データに基づく場合は 0.5% 程度、Far Field データに基づく場合は 0.001% 程度のノイズが限界であることがわかった。成果については理論応用力学連合講演会において発表した。(学会発表)

続いて、推定できることが理論的に保証されている多角形だけではなく、滑らかな境界を持つ場合の指示関数の対数微分の挙動、およびその場合の介在物の推定可能性について研究した。研究の結果、介在物が滑らかな境界を持つ場合には、形状そのものをとらえる

ことはほぼ不可能であるが、介在物の大まかな位置は推定できることを確認できた。さらに介在物の形状は多角形であるが、囲い込み方向が正則でない場合に対する指示関数の対数微分の特性について数値実験的に研究をおこなった。囲い込み方向が正則でない場合の介在物の形状の推定可能性は理論的に保証されておらず、また指示関数の挙動についての理論的研究も進んでいなかった。研究の結果、指示関数の対数微分は、囲い込み方向が正則な場合とは異なり大きく振動を起こすことが確認できた。これら結果については国際研究集会 Waves2013、および日本応用数学会 2013 年度年会において発表した。(学会発表) 現在、結果をまとめた論文について、現在投稿の準備を進めている。

(イ) 波動方程式のソース逆問題の直接的数値解法

波動方程式のソース逆問題の直接的数値解法として、重みつき境界積分の一種である reciprocity gap functional を利用した手法を中心に研究を進めた。

まずソース項として地震や固定音源に対応する、位置は固定されているが強度が時間的に変動する数個の点状波源が存在する場合を考え、その位置と強度を推定する手法について研究した。研究の結果、3種類の reciprocity gap functional を利用することにより、点波源の個数、位置および強度を即時的に推定可能な数値解法の開発に成功した。さらに開発した手法の有効性を確認するため数値実験による検証を行い、1%程度のノイズの下では3個程度であればそれを分離し、位置および強度を推定できることを確認した。開発当時、Reciprocity gap functional を利用した手法として強度の時間変化を即時的に推定することが可能な手法は知られておらず、開発した手法は極めて意義のあるものである。本成果については国際的論文誌 Inverse Problems に発表するとともに、応用数学会環瀬戸内応用数理研究部会シンポジウムで口頭発表を行った。(雑誌論文、学会発表)

続いて、乗用車のような時間的に移動する点状波源を考え、その位置と強度を推定する手法について研究を進めた。研究の結果、固定した点波源の推定に利用した3種類の reciprocity gap functional が、移動波源に対しても適用可能であり、新たな工夫を追加することにより、その位置と強度を推定できることを理論的に示した。さらにこの結果を数値的に実装し、即時的に波源の位置および強度を推定するための数値解法を開発した。有効性を確認するため数値実験による検証を行ったところ、2個の点波源が0.5%程度のノイズの下で、十分な精度で推定できることを確認した。本成果については、日本応用数学会2012年度年会、京都大学数理解析研究所共同研究集会、国際研究集会

Taiwan-Japan Joint Conference on PDE and Analysis, Applied Inverse Problem Conference 2013、および九州大学 IMI 研究所研究集会 Inverse problems for practice, the present and the future において発表した。(学会発表) 現在、結果をまとめた英文の論文について、投稿の準備を進めている。

さらに、アンテナやスピーカーのように指向性を持つような波源に対する推定法について研究を進めた。このような波源の数値モデルとして双極子モデルを考え、その位置と双極子モーメントを推定する手法の開発と数値的実装、および数値実験を行った。その結果、これまでに開発した点波源に対する推定手法を拡張することにより、双極子の移動速度が小さい場合にはその位置および双極子モーメントのうち 2 方向の値が推定可能な手法の開発に成功した。これまで双極子の推定問題に関する研究はいくつかあるが、波動方程式のようなダイナミクスを持つ方程式に関するものは少ない。また即時的な推定手法に関する研究は皆無であることから、本研究成果は画期的な結果であると考えられる。なお、本研究成果については、日中韓フォーサイトプログラム研究集会「Conference on Modeling and Computation of Applied Inverse Problems」、および京都大学数理解析研究所共同研究集会「微分方程式の逆問題とその周辺」において発表した。(学会発表) 今後は、今回推定することができなかった双極子モーメントの残り 1 つの方向の推定手法、また双極子が移動する場合に対する推定手法の開発について研究を進めていきたいと考えている。

なお、本研究課題の研究途上で、波動方程式のソース逆問題に対し Kohn-Vogelius の汎関数を用いることにより、新たな解法を開発できることが明らかとなった。本手法については理論的研究はある程度進めることができたが、その数値的実装において、波動方程式の非同次境界値問題に対する高精度の数値解法の開発に手間取り、大きな進展を得ることができなかった。しかし、新たな可能性を秘めた解法の一つであり、今後、検討を進めていきたいと考えている。

5 . 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 2 件)

Takashi Ohe, A numerical method for an inverse source problem for a scalar wave equation without optimisation procedures, MI Lecture Note "Inverse problems for practice, the present and the future", 査読無, Vol. 54, 2014, 67-76

T. Ohe, H. Inui and K. Ohnaka, Real time reconstruction of time-varying point sources in a three dimensional scalar wave equation, Inverse Problems, 査読有, 27, 2011, 115011 (19pp)
DOI: 10.1088/0266-5611/27/11/115011

[学会発表](計 11 件)

大江貴司, 3次元波動方程式における双極子の直接的再構成, 京都大学数理解析研究所研究集会「微分方程式の逆問題とその周辺」(招待講演), 2015年1月27日, 京都大学数値解析研究所(京都府京都市)

Takashi Ohe, Numerical reconstruction of solutions in inverse problems for partial differential equations, A3 Foresight Program Conference on Modeling and Computation of Applied Inverse Problems (Invited Talk). 2014年11月22日. International Convention Center, Jeju, Korea

大江貴司, 池島優, 指示関数の対数微分に基づく囲い込み法の数値的性質について, 2013年9月, 日本応用数学会 2013年度年会, 2013年9月11日, アクロス天神(福岡県福岡市)

大江貴司, 最適化法を利用しない逆問題の数値解法 ~ 波動方程式のソース逆問題を題材に ~, 九州大学 IMI 研究所研究集会 Inverse problems for practice, the present and the future, (招待講演) 2013年9月4日, 九州大学 IMI 研究所(福岡県福岡市)

Takashi Ohe, Numerical reconstruction of moving sources in a three-dimensional scalar wave equation, Applied Inverse Problem Conference 2013, 2013年7月1日, KAIST(Korea Advanced Institute for Sciences and Technology), 大韓民国大田市

Takashi Ohe and Masaru Ikehata, Numerical method for an inverse obstacle scattering problem based on the logarithmic differential of indicator function in the enclosure method, Waves 2013, 2013年6月6日, Hotel El Mouradi Gammarth, チュニジア

大江貴司, 池島優, 逆散乱問題に対する囲い込み法における指示関数の対数微分を用いた解法とその数値的実装, 第 62 回理論応用力学講演会, 2013年03月06日, 東京工業大学(東京都大田区)

Takashi Ohe, Reconstruction of moving point sources in three-dimensional scalar wave equation, Taiwan-Japan joint conference on PDE and analysis(招待講演), 2012年12月26日, 国立台湾大学 (National Taiwan University), 中華民國

大江貴司, Numerical reconstruction of moving wave sources in three-dimensional scalar wave equation, 京都大学数理解析研究所共同研究集会「偏微分方程式の逆問題解析とその周辺に関する研究」, 2012年11月21日, 京都大学数理解析研究所(京都府京都市)

大江貴司, 大中幸三郎, 波動方程式における複数の移動波源のリアルタイムな推定法, 日本応用数学会2012年度年会, 2012年08月30日, 稚内全日空ホテル(北海道稚内市)

大江貴司, 乾裕一, 大中幸三郎, 3次元波動方程式における複数の点波源のリアルタイムな推定法, 日本応用数学会環瀬戸内応用数理研究部会第15回シンポジウム, 2011年12月3日, 山口東京理科大学(山口県宇部市)

〔図書〕(計 0件)

〔産業財産権〕
取得状況(計 0件)

〔その他〕

6. 研究組織

(1)研究代表者

大江 貴司 (OHE, Takashi)
岡山理科大学・理学部・教授
研究者番号: 90258210

(2)研究分担者

池畠 優 (IKEHATA, Masaru)
広島大学大学院・工学研究科・教授
研究者番号: 90202910