

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 6 日現在

機関番号：62603

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2011～2013

課題番号：23540177

研究課題名(和文)立方体のトーラスへの確率逐次充填

研究課題名(英文)Random sequential packing of cubes into torus

研究代表者

伊藤 栄明(Itoh, Yoshiaki)

統計数理研究所・大学共同利用機関等の部局等・名誉教授

研究者番号：60000212

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,500,000円、(間接経費) 1,050,000円

研究成果の概要(和文)：多次元ランダムパッキングの解析的研究は非常に困難であることが知られているが、極端に単純化された確率モデルについて解析的に研究することにより、もとの多次元ランダムパッキングの解析的研究の糸口をつかもうとするものである。辺の長さ1である格子を考え、格子点の上にcubeの頂点を置く、離散的な向きをそろえたランダムパッキングを考える。辺の長さmのcubeを辺のながさ2mのcubeにランダムにつめてゆく。さらに片隅充填志向という条件をいれると空間の次元dとの関連で充填されたcubeの数の期待値の漸化式が得られ、充填されたcubeの数の期待値のmおよび次元dについての漸近的挙動を調べた。

研究成果の概要(英文)：Very simplified models are introduced to understand the random sequential packing models mathematically. The 1-dimensional model is sometimes called the Parking Problem. To obtain a 1-dimensional packing density, distribution of the minimum of gaps, etc., the classical analysis has to be studied. The packing density of the general multi-dimensional random sequential packing of cubes (hypercubes) makes a well-known unsolved problem. The experimental analysis is usually applied to the problem. We introduced simplified multi-dimensional models of cubes and torus, which keep the character of the original general model, and introduced a combinatorial analysis for combinatorial modelings. Here we succeeded in obtaining expected number of cube for a corner preference random sequential packing of cubes into a larger cube mathematically without using computer simulations, which will help to solve our original problem random sequential packing of cubes into torus.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・数学一般(含確率論・統計数学)

キーワード：確率論

1. 研究開始当初の背景

最密充填の問題は数学における基本的な課題のひとつであり、幾何学的な興味だけでなく、符号理論、結晶群の理論などへ応用がある。それを確率化したものとしてランダムパッキングという問題がある。ランダムパッキングは自然科学、工学などにおける応用があり実験的研究、計算機シミュレーションによる研究、数学的研究、等多くの研究がある (Evans, J. W. (1993) Random and cooperative sequential adsorption, Rev. Mod. Phys., Vol. 65, 1281--1329.

)。A. Renyi (1958) は 1 次元の充填率を recursion をもちいて解析的にもとめた。向きをそろえて辺の長さ 1 の cube を辺の長さ x の cube にランダムに詰めてゆくとき充填率はどのようになるか、という問題は以前から議論されている。 x を十分大とする d 次元 cube の場合の充填率の極限が、(i) 存在し、(ii) 1 次元の充填率の d 乗になる、という Palasti の予想が 1960 年代から議論されている。多くの研究者が、興味をもち証明をこころみた。充填率の極限の存在 (i) のみが知られ (Penrose (2002))、充填率の値についての解析的結果はないように思う。計算機シミュレーションの結果より (ii) はなりたたないと考えられている。

多次元のランダムパッキングの本質を失わずに、可能なかぎり単純化し高い次元での充填率を考えるという課題を報告者等は考えた (伊藤栄明、上田澄江 (1983)、Itoh and Solomon (1986))。

2. 研究の目的

1983 年に報告者等は提案したモデルについて解析的な議論はできなかった。ロシアおよびフランスの研究者の協力により充填率の期待値について lower bound および upper bound 等が得られた。数理的な研究の糸口を見出すことができ、確率論、離散幾何学として興味ある問題であることがわかってきた。この研究をすすめ、cube の torus へのランダムパッキングの充填率の期待値の lower bound および upper bound を求め、えられた幾何学的構造の数えあげの問題をあきらかにし、結晶構造の理解等への応用を試みる。

3. 研究の方法

高次元の離散幾何学における書物 Regular Polytopes (H. S. M. Coxeter, Dover 1973) におけるような離散幾何学を活用し組み合わせ論的に確率を計算する。ロシア、ドイツ、ハンガリー等において 19 世紀以来蓄積している膨大な離散幾何学、数理結晶学の結果があり、それらを活用することができる研究課題である。ランダムパッキングの過程により可能なスペースがへってゆく過程を高次元 cube が退化してゆく過程としてとらえる等の様々な離散幾何学的方法を試みる。数学研究用ソフト GAP-system、Mathematica をもちいて研究を行う。

4. 研究成果

辺の長さ 1 である格子を考え、格子点の上に cube の頂点を置く、離散的な向きをそろえたランダムパッキングを考える。辺の長さ m の cube を辺のながさ $2m$ の cube にランダムにつめてゆく。さらに片隅充填志向という条件をいれ

ると空間の次元 d との関連で充填された cube の数の期待値の漸化式が得られ、充填された cube の数の期待値の m および次元 d についての漸近的挙動を得た。この結果は当初の目的に大きく貢献し d と m との関連で充填率を考える上で前進した。漸化式が求められないのが多次元確率逐次充填であったが漸化式が得られる単純化されたモデルを見出したことになる。この漸化式は解析的には analysis of algorithms の分野において蓄積している解析的手法をもちるものであり、Mellin transform, saddle point method. 等の古典的解析学をもちいるが多次元ランダムパッキングの問題と盛ん現在研究されている分野の研究がむすびついたことになる。もとの torus への cube のパッキングの問題はより幾何学的な側面がつよく困難であり解決にはいたらなかったが最近報告者等の以前の研究を発展させた研究がヨーロッパで行われ、本研究の成果を生かして 当初の目的に向け研究を進めたい。

5 . 主な発表論文等

Itoh, Y. and Krapivsky, P. L.
Continuum cascade model of directed random graphs: traveling wave analysis, Journal of Physics A Mathematical and Theoretical, 45, 2012, 455002(10pp).

Fuchs, M., Hwang, H.K., Itoh, Y., Mahmoud, H.: A binomial splitting process in connection with corner parking problems, Journal of Applied Probability (to appear)

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 件)

[学会発表](計 件)

[図書](計 件)

[産業財産権] 出願状況(計 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

取得状況(計 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

[その他]
ホームページ等

6 . 研究組織
(1)研究代表者 伊藤 栄明
(Itoh Yoshiaki)

統計数理研究所名誉教授

研究者番号：60000212

(2)研究分担者 ()

研究者番号：

(3) 連携研究者 ()

研究者番号 :