

機関番号：10101

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2011～2013

課題番号：23540178

研究課題名(和文)完全WKB法における超局所解析

研究課題名(英文)On the exact WKB method from a viewpoint of microlocal analysis

研究代表者

本多 尚文(Honda, Naofumi)

北海道大学・理学(系)研究科(研究院)・准教授

研究者番号：00238817

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,900,000円、(間接経費) 1,170,000円

研究成果の概要(和文)：本研究課題は、大きなパラメータを持つ高階線形常微分方程式およびパウルベ階層などの非線形常微分方程式系のストークス現象を研究したものである。

高階の線形常微分方程式のなすストークス幾何は大変複雑であり、接続係数を求める問題は決して自明でない。この問題に対し、ある種の指標を用いることで、各ストークス曲線上のストークス接続係数を順番に求めるアルゴリズムを構成することに成功した。

また、パウルベ階層(Painlevé) m に対して、そのストークス現象を考察する上で重要なインスタントン解を構成することに成功した。ここでの手法は他のパウルベ階層に対しても有効であり、更なる応用が期待される。

研究成果の概要(英文)：We study Stokes phenomenon for a higher order linear differential equation with a large parameter, and we also study the same problems for a non-linear differential equation such as a Painlevé hierarchy.

A Stokes geometry for a higher order linear differential equation is quite different from one for a 2nd order linear differential equation because of existence of virtual turning points and new Stokes curves. It is very complicated, and thus, possibility to successively obtain a Stokes coefficient on each Stokes curve is quite uncertain. By using so called the depth function, in this study, we have shown that it is always possible to have all the Stokes coefficients successively.

We also have succeeded in constructing an instanton-type solution for the first Painlevé hierarchy (PI) $_m$. This result is quite important because it contains sufficiently many free parameters, and hence, we can take a family of these solutions as a basis of solutions for a connection problem.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・解析学基礎

キーワード：完全WKB解析 ストークス現象 代数解析 超局所解析

1. 研究開始当初の背景

特異摂動論とは、大きなパラメーター η を持つ（もしくは、その逆数を考えて小さなパラメーターを持つ）常微分方程式を対象とし、その方程式の解で η が十分大きいところでの挙動の良く判るものを構成し、その構成した解達の性質を研究する分野である。特異摂動論は、例えば、量子力学でプランク定数を 0 に近づけることで、古典論的現象と量子論的現象との関連を明かにす際に用いられなど、実用上も重要である。

挙動の良く判る解として、 η の逆冪で展開されるような解が一般に用いられる。実際、 η の逆冪からなる形式冪級数を微分方程式に代入することで、線形常微分方程式の場合、このような形式解は容易に得ることが出来る。しかし、こうして構成した形式解は収束せず、一般には発散する。そこで、何らかの方法でこの発散する形式解に漸近するような真の解を見つける必要がある。真の解を与える方法の代表的なものとして**完全 WKB 法**がある。

特異摂動論における際立った特色は、この**完全 WKB 法**等で得られた真の解は、必ずしも全ての点においてその形式解に漸近せず、ある特定の領域でのみ漸近するという性質があることである。つまり、領域によって解の漸近挙動が大きく変わるのである。

このような領域は、**変わり点**と呼ばれる（特異摂動論上の）特異点から派生する曲線群（**ストークス曲線**）によって特徴付けられる。真の解はストークス曲線上でその漸近挙動を大きく変化させるのである。また、各領域上の真の解達は、互いに無関係ではなく、ストークス曲線上で**ストークス係数**と呼ばれる係数によって関係付けられる。

従って、大域的な解を構成するには、**変わり点**と**ストークス曲線**からなる**ストークス幾何**を理解し、更に、各ストークス曲線上でのストークス係数を求める必要がある。

大きなパラメーターを持つ 2 階の線形常微分方程式に対しては、青木貴史、河合隆裕、竹井義次らの精力的な研究により、そのストークス幾何とストークス係数について、ほぼ満足すべき結果が得られている。

2. 研究の目的

本研究課題の目的は、大きなパラメーターを持つ高階の線形常微分方程式に対して、そのストークス幾何とストークス係数について（2 階のときのような深い）知見を得ることである。

しかしながら、状況は 2 階の場合と高階のそれでは大きく異なる。高階の場合には以下のような 2 階の場合には見られない特有の困難がある。

(1) 変わり点のみでは、正しいストークス幾何が得られず、**仮想変わり点**と呼ばれ

る新たな変わり点が必要となる。

仮想変わり点は、元の方程式から誘導されるある種の偏微分方程式の陪特性曲線の自己交差点として定義される。つまり、その定義は大域的な幾何に依存しており、容易には扱えないものである。

(2) これにともない、仮想変わり点から派生するストークス曲線(**新しいストークス曲線**と呼ばれる)がそのストークス幾何に加わる。この新しいストークス曲線は今迄のストークス曲線とは挙動が異なる。たとえば、仮想変わり点の近傍では、それ上でストークス現象が起きない。また、ある種の交差点を通過すると、この曲線は有効化し、それ上でストークス現象が発生するようになる。つまり、新しいストークス曲線の挙動もまた、局所的な条件のみでは定まらず、大域的な状況から決定されるのである。

以上のように、高階方程式のストークス幾何は、大域的な幾何を上手くコントロールする必要がある。研究代表者は、このような状況を適切に扱うために、ある種の（開いた）リーマン面を構成することに成功している。更に、仮想変わり点とその零点となるような一価正則関数をこのリーマン面上に構成した。また、この関数を用いて**深さ関数**と呼ばれる、新しいストークス曲線間の依存関係を示す整数値関数も構成している。このような道具立てを上手く用いることで、ストークス係数を求めるアルゴリズムの構成等の重要な問題を解決することが具体的な目標の 1 つである。

ストークス現象は非線形常微分方程式、例えば（大きなパラメーターを入れた）**パンルベ方程式**等でも見られることが知られている。高階線形方程式に現われる仮想変わり点に相当するものが、高位のパンルベ階層で見られることも知られている（**西川現象**）。この研究課題で考察している高階線形方程式に関する問題を、高位のパンルベ階層に拡張することも試みる。

3. 研究の方法

この研究課題を達成するには、この分野における専門家との討論が必要不可欠である。

(1) 青木貴史（近畿大学）、河合隆裕（数理解析研）、竹井義次（数理解析研）などの完全 WKB 解析の専門家との研究打合せを密に行う。

(2) Luca Prelli (Univ. Padova) 等の代数解析の専門家との研究打合せを密に行う。

(3) 国際研究集会を行い、関連する分野の専門家を招聘し、最新の知見を得る。

以上により、この研究課題を達成する。

4. 研究成果

主要な研究成果は以下のとおりである。

(1) 高階線形方程式のなすストークス幾何は非常に複雑であり、各ストークス曲線上のストークス係数を整合的に定められるかは決して明らかではない。この問題に対して、幾つかのサイクルに関連する積分基本量を用いることで、各ストークス曲線上のストークス接続係数を順番に定めることが可能であることを示した。

(2) 非線形方程式の解の接続問題を考える上で、まず、その基底となる解を構成することが最初の重要な問題である。PI_m等のパンルベ階層は、非常に複雑な方程式であり直接計算で解を構成することは大変難しい。この問題に対して、方程式系の代数構造を上手く取り扱う手法を開発した。この方法により、PI_mの基底となる解の存在が(任意の階層に対し)示された。この手法の優れた点は、他のパンルベ階層(例えば、PII_m等)にも用いることが出来ることである。

(3) これらの成果と関連する問題としてS行列の特異性について調べた。特に、2次元の場合のトラスブリッジダイアグラムに付随する特異点の分類に成功した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 11 件)

- ① Naofumi Honda, Joyce McLaughlin and Gen Nakamura, Conditional stability for single interior measurement, Inverse Problems, 30 (055001), pp. 1-19, 2014, 査読あり
- ② Naofumi Honda and Takahiro Kawai, A computer-assisted study of the Landau-Nakanishi Geometry, RIMS Kokyuroku No. 1861, pp. 100-110, 2014, 査読なし
- ③ Takashi Aoki, Naofumi Honda and Susumu Yamazaki, On kernel functions and symbols of analytic pseudo-differential operator, RIMS Kokyuroku No. 1835, pp. 21-37, 2013, 査読なし
- ④ Takashi Aoki, Naofumi Honda and Yoko Umeta, On the number of the turning points of the second kind of the Noumi-Yamada systems with a large parameter, RIMS Kokyuroku Bessatsu B37, pp. 1-30, 2013, 査読あり
- ⑤ Takashi Aoki, Naofumi Honda, Yoko

Umeta, On a construction of general formal solutions for equations of the first Painleve hierarchy I, Advances in Mathematics 235, pp. 496-524, 2013, 査読あり

- ⑥ Naofumi Honda and Luca Prelli, Multi-specialization and multi-asymptotic expansions, Advances in Mathematics 232, pp. 432-498, 2013, 査読あり
- ⑦ Naofumi Honda, Gen Nakamura and Murad Sini, Analytic extension and reconstruction of obstacles from few measurements for elliptic second order operators, Mathematische Annalen 355, pp. 401-427, 2013, 査読あり
- ⑧ Naofumi Honda and Kohei Umeta, On the sheaf of Laplace hyperfunctions with holomorphic parameters, J. Math. Sci. Univ. Tokyo 19, pp. 559-586, 2012, 査読あり
- ⑨ Takashi Aoki and Naofumi Honda, Geometric properties of the Riemann surfaces associated with the Noumi-Yamada systems with a large parameter, J. Math. Soc. Japan 63(4), pp. 1085-1119, 2011, 査読あり
- ⑩ Naofumi Honda and Giovanni Morando, Stratified Whitney jets and tempered ultradistributions on the subanalytic site, Bulletin de la Société Mathématique de France 139(3), pp. 389-435, 2011, 査読あり
- ⑪ Naofumi Honda and Luca Prelli, Multi-specialization and multi-asymptotic expansions, Proc. Japan. Acad. 87(A), pp. 69-72, 2011, 査読あり

[学会発表] (計 4 件)

- ① 本多 尚文, 多重超局所化について, 代数解析学と局所凸空間, 日本大学(東京都千代田区), 2014年02月18日
- ② 本多 尚文, Conditional stability for single interior measurement, 代数解析学の諸問題, 千葉大学(千葉県千葉市), 2013年11月30日
- ③ Naofumi Honda, Multi-specialization and multi-microlocalization, Recent trends in Algebraic Analysis, Univ. Padova (Padova, Italy), 2013年2月19日
- ④ Naofumi Honda, Micro-analytic S-matrix theory revisited, Recent development of microlocal analysis and asymptotic analysis, 京都大学数理解析研究所(京都市), 2012年10月24日

[図書] (計 0 件)

[産業財産権]

- 出願状況 (計 0 件)
- 取得状況 (計 0 件)

[その他]

6. 研究組織

(1) 研究代表者

本多 尚文 (HONDA, Naofumi)
北海道大学・理学研究院・准教授
研究者番号: 00238817

(2) 研究分担者

内田 素夫 (UCHIDA, Motoo)
大阪大学・理学研究科・准教授
研究者番号: 10221805