

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 3 日現在

機関番号：10102

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2011～2015

課題番号：23540179

研究課題名(和文) リー代数の表現論と概均質ベクトル空間の b 関数研究課題名(英文) Representation theory of Lie algebras and b -functions of prehomogeneous vector spaces

研究代表者

和地 輝仁 (Wachi, Akihito)

北海道教育大学・教育学部・准教授

研究者番号：30337018

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,700,000円

研究成果の概要(和文)：いくつかの種類可約概均質ベクトル空間の b -関数を、リー代数の表現論を応用して計算したり、部分的ではあるが群軌道との関係などの b -関数の性質を調べた。特に、古典型の放物型概均質ベクトル空間について、対応する Capelli 恒等式を見出し、それを用いて b -関数を計算した。また、これと関連して、対称空間の冪零軌道の組合せ論的・表現論的性質を明らかにし、鏡映群の余不変式環については、そのレフシェッツ性などの性質を明らかにした。

研究成果の概要(英文)：We have computed b -functions of some reducible prehomogeneous vector spaces by using Lie theory, and have studied properties of b -functions such as relations to group orbits. In addition, we have studied related things as follows. We have clarified combinatorial and representation-theoretic properties of nilpotent orbits on symmetric spaces, and the Lefschetz properties of coinvariant rings of reflection groups.

研究分野：リー代数の表現論

キーワード：概均質ベクトル空間 b 関数 Capelli 恒等式

1. 研究開始当初の背景

(1) Capelli 恒等式は、変数や偏微分作用素を成分とする行列式で表される、不変微分作用素環における等式である。Capelli 恒等式は、一方では、行列式関数の b -関数を計算することに用いられる。これは Capelli 恒等式の発生の動機のひとつでもある。他方では、Capelli 恒等式を元にして、一般線型リー代数の普遍包絡環の中心の生成元がわかったり、一般線型リー代数の一般パーマ加群のある系列の既約性を制御していたりするなどする。このように、Capelli 恒等式を仲立ちとして、 S_b -関数が、普遍包絡環やその中心、あるいは、冪零根基上の群軌道のようなリー代数の表現論的対象にも深く関わっている。

(2) Capelli 恒等式と普遍包絡環の中心との関係を組織的に説明したのが Howe-Umeda(1991) である。ここでは、すべての既約な無重複表現に対して、上記の例での行列式関数の代わりに概均質ベクトル空間の相対不変式を用いることで、Capelli 恒等式が存在するかどうかを調べ、存在する場合はそれを元にした普遍包絡環の中心の生成元を与えている。しかしながら無重複表現は概均質ベクトル空間の中でもごくわずかな特殊な場合であるから、 b -関数を研究する立場から見れば無重複表現の場合に Capelli 恒等式を調べるだけでは不足である。

(3) 本研究課題の申請時点で、従来の Capelli 恒等式では扱えないような b -関数も研究するため、無重複表現の場合に限らない場合にリー代数の表現論を活用した先行例があった。まず、 b -関数の決定については、数論的手法も用いた杉山 (2006) の結果と、表現論的手法を用いた和地 (2006) の結果があった。また、普遍包絡環の中心元・不変元との関わりについては、Lee-Nishiyama-Wachi (2008) や西山-和地 (2009) で対称対の Capelli 恒等式が得られていた。

2. 研究の目的

(1) 概均質ベクトル空間の b -関数は、数論的研究に比べて表現論的視点からの研究が多くはない。そこで、概均質ベクトル空間の b -関数の種々の性質を、リー代数の表現論的視点から研究することが目的である。具体的には、 b -関数と群軌道の幾何や群軌道の分類との関係、 b -関数とリー代数の普遍包絡環との関係、未知の S_b -関数の決定などを、表現論を利用して研究することが目的である。具体的には以下のことがらを明らかにする。

これまでリー代数の表現論的に計算することができていない概均質ベクトル空間の b -関数を、リー代数の表現論を利用して計算する。杉山 (2006) による A 型の籠に付随する概均質ベクトル空間の b -関数は、和地 (2006) の表現論的手法によっても決定が可能であったから、特に、それと類似の概均質

ベクトル空間の b -関数について研究する。

対称対の Capelli 恒等式は、従来の Capelli 恒等式とは異なり普遍包絡環の中心と対応の付くものではなく、部分群の作用による不変元と対応の付くものであるが、従来の Capelli 恒等式で見られた b -関数との関係が、ここではどうなっているのかを解明する。

非常に良い状況では b -関数の零点が群軌道と 1 対 1 に対応するが、そこまで良い状況ではなくとも、例えば対称対のような良い設定において、 b -関数と群軌道の関係を解明する。

3. 研究の方法

国内外の研究集会やセミナーなどを含めた研究打合せを通して新しい知見を得ながら研究を進める。また、着実に成果をあげる工夫として、計算機による具体例の計算を積極的に取り入れる。

4. 研究成果

(1) 概均質ベクトルの b -関数に関する成果としては、古典型の放物型概均質ベクトル空間に対して、対応する Capelli 恒等式を得た(雑誌論文欄の)。これまで、個別の概均質ベクトル空間に、いわば散発的に Capelli 恒等式を得ていたが、表現論的に意味のあるひとつの系列全体について Capelli 恒等式を得たことは意義がある。

古典型とは、一般線型リー群、直交リー群、斜交リー群のことを指し、放物型概均質ベクトル空間とは、これらの群の放物型部分群のリー代数の冪零根基に、レビ部分群が作用しているものを指す。簡単な場合には、冪零根基は正方行列の空間、交代行列の空間、対称行列の空間になり、それぞれ、行列式、ファイアン、行列式が、不変式となる。より複雑な場合では、古典型の放物型概均質ベクトル空間とは、正方とは限らない行列の空間や、交代あるいは対称行列の空間のいくつかの直和に群が作用しているものである。

古典型の概均質ベクトル空間に対応する Capelli 恒等式として得られた等式は、従来の Capelli 恒等式のように、2 個 (あるいはその組合せで得られる偶数個) の行列式の積が現れるものではなく、奇数個の行列式の積が現れるものである。これを奇数型の Capelli 恒等式と呼ぶことにする。従来の Capelli 恒等式に特徴的であった対角シフトが、奇数型の Capelli 恒等式ではまったく現れないことも大きな違いである。

特殊な場合における奇数型の Capelli 恒等式は、一般パーマ加群の表現に現れる微分作用素と関係のあることも明らかになった。これは、本研究以前から一部の型でわかっていたことであるが、本研究により、古典型においては常にこの関係があることが明らかになった。これは、奇数型の Capelli 恒等式の表現論的意味付けとして意義がある。

奇数型の Capelli 恒等式を用いると、初等的

といてよい計算で、古典型放物型概均質ベクトル空間の b -関数が計算できる。これは一般には可約な概均質ベクトル空間であるが、その b -関数は、既約な概均質ベクトル空間の場合の b -関数を「シフト」したものの積になっており、これは群軌道との関係があることも明らかになっている。これは研究の目的の に対する部分的回答でもある。以上のように、奇数型 Capelli 恒等式を用いた b -関数の計算を通して、奇数型 Capelli 恒等式や b -関数の表現論的意味が明らかになったことに意義がある。

(2) 対称対の Capelli 恒等式に関する成果については、雑誌論文欄の において対称対の冪零軌道の組合せ論的・表現論的意味を明らかにした。

対称対の冪零軌道とは、対称対の接空間における冪零元のなす錐における群軌道のことを指す。古典型対称対について、軌道の個数などの組合せ論的な性質が、明らかになり、冪零軌道のいくつかの和集合を随伴多様体として持つようなハリッシュ-チャンドラ加群の存在や、その構成方法といった、表現論的性質も明らかになった。また、2つの冪零軌道が、余次元1の部分多様体を共通部分として持つときを隣接と呼ぶことにすると、この隣接関係を辺として冪零軌道がどのようなグラフを導くかといった、幾何的性質も明らかになった。

(3) 鏡映群の余不変式環のレフシェッツ性についても成果があがった(雑誌論文欄の 、 図書欄の)。これは、当初の計画にはないものであったが、Capelli 恒等式や対称対の冪零軌道の研究とも関連して研究が進んだ。特に、海外の研究者との連携が取れたことが、研究の進展につながった。

鏡映群とは鏡映で生成される群のことであり、鏡映群が自然に多項式環に作用したときの不変式環は、基本不変式と呼ばれる不変式多項式環になる。この基本不変式で生成されるイデアルで、元の多項式環を割って得られる剰余環が余不変式環である。例えば、鏡映群としてワイル群を考えると、余不変式環は、ワイル群に対応する旗多様体のコホモロジー環と同型になり、幾何的手法も用いることが可能である。

複素多様体はハードレフシェッツ定理を満たすが、この性質を代数的に抽出したものが、次数環のレフシェッツ性である。従って、ワイル群の余不変式環はレフシェッツ性を持つが、複素鏡映群まで広げて考えると幾何を用いることができないので、その余不変式環がレフシェッツ性を持つことは未解決であった。このうち、1つの型を除く複素鏡映群の余不変式環がレフシェッツ性を持つことが、場合によっては計算機による計算も用いて明らかになった。

そして、計算機に頼らず、代数的に証明する

ことにも取り組みも、Larry Smith や ChrisMcDaniel との打合せにより進展があった。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計7件)

Tadahito Harima, Akihito Wachi and Junzo Watanabe. The quadratic complete intersections associated with the action of the symmetric group. Illinois J. Math. Volume 59, Number 1 (2015), 99-113. March. 査読有

Kyo Nishiyama, Peter Trapa and Akihito Wachi. Codimension one connectedness of the graph of associated varieties. Tohoku Math. J. (印刷中) 査読有

Akihito Wachi. Capelli identities of odd type and b -functions. Commentarii Mathematici Universitatis Sancti Pauli 63 (2014), no 1 & no 2, 291--303. 査読有

Wachi, Akihito. Logarithmic derivative and the Capelli identities. New developments in group representation theory and non-commutative harmonic analysis, 43--52, RIMS Kōkyūroku Bessatsu, B36, Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto, 2012. December. 査読有

Maeno, Toshiaki; Numata, Yasuhide; Wachi, Akihito. Strong Lefschetz elements of the coinvariant rings of finite Coxeter groups. Algebr. Represent. Theory 14 (2011), no. 4, 625--638. August. 査読有

〔学会発表〕(計10件)

和地輝仁. 穴空き Capelli 恒等式. 沖縄表現論研究小集会, 2015年11月7日, 琉球大学(沖縄県・西原町).

和地輝仁. 交代行列に対する奇数型 Capelli 恒等式. 研究会「不変性と双対性」, 2015年9月6日, 鹿児島大学(鹿児島県・鹿児島市)

Akihito Wachi. The Lefschetz properties and complex reflection groups. Workshop on Lefschetz properties, 2015年3月9日, Universitat Goettingen, (ゲッチンゲン・ドイツ)

和地輝仁. 複素鏡映群の余不変式環の強レフシェッツ性. 日本数学会2014年度年会一般講演, 2014年3月16日, 学習院大学(東京都).

Akihito Wachi. 複素鏡映群の余不変式環の強レフシェッツ性. 第35回可換環論シンポジウム, 2013年12月3日, 数理解析研究所(京都府・京都市)

和地輝仁. 不変式で生成されるイデアル. 2013年度表現論シンポジウム, 2013年11月28日, マホロバ・マインズ三浦(神奈川県・三浦市)

和地輝仁. 奇数型 Capelli 恒等式. 日

本数学会 2012 年度秋季総合分科会一般講演,
2012 年 9 月 21 日, 九州大学 (福岡県・福岡
市).

Akihito Wachi. q-Analogues of
dimension formula and the SLP. "Workshop in
Hawaii: Aspects of SLP and WLP", 2012 年
9 月 10 日, Hawaii Tokai International
College (ホノルル・米国)

和地輝仁. 可約概均質ベクトル空間の
b-関数と一般 Verma 加群. 数理解析研究所
研究集会「表現論と非可換調和解析の展
望」, 2012 年 6 月 19 日, 数理解析研究所 (京
都府・京都市)

Akihito Wachi. The b-function of a
reducible prehomogeneous vector space and
a scalar generalized Verma module.
International workshop on representation
theory and harmonic analysis, 2012 年 6 月
6 日, 南開大学 (天津・中国).

〔図書〕(計 1 件)

Harima, Tadahito; Maeno, Toshiaki;
Morita, Hideaki; Numata, Yasuhide; Wachi,
Akihito; Watanabe, Junzo. The Lefschetz
properties. Lecture Notes In Mathematics,
2080. Springer, Heidelberg, 2013. 総ペ
ージ数 250, 主な執筆範囲 171--188.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

和地 輝仁 (WACHI, Akihito)

北海道教育大学・教育学部・准教授

研究者番号: 30337018