

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 5 月 5 日現在

機関番号：11101

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2011～2013

課題番号：23540180

研究課題名(和文) ヒルベルト空間・クレイン空間の作用素の数域の境界についての研究とその応用

研究課題名(英文) Study of the boundary of numerical range of Hilbert or Krein space operators and its applications

研究代表者

中里 博 (Nakazato, Hiroshi)

弘前大学・理工学研究科・教授

研究者番号：10188922

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,200,000円、(間接経費) 360,000円

研究成果の概要(和文)：有限次元のヒルベルト空間の線形作用素の数域の境界につき、特にシフト作用素の場合につき、代数曲線論的に特異点を用いてその性質を明らかにすることができた。また、クレイン空間の作用素の数域に関しては、関連する行列要素の積がなす領域に関して前進があった。核磁気共鳴装置や分光学への応用の基礎の部分に貢献するものとする。成果は、15編の学術論文と1冊の著書の形でまとめて発表した。また、外国での研究集会1回を含む7回の学会発表でも成果を公開した。

研究成果の概要(英文)：Some interesting results are found on the boundary of numerical range of linear operators in a finite dimensional Hilbert space. Especially some algebraic curve theoretic analysis is performed for shift operators. Concerning with Krein space numerical ranges, some results on the product ranges are obtained. The result will contribute to the basis of applications in nuclear magnetic resonance or spectral scopy. The results are presented in 16 academic papers and one book. By 7 presentations, the results are presented. New results in dynamics and hyperbolic differential equations are also obtained.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：数域 数域半径 ヒルベルト空間 クレイン空間 線形作用素 行列 固有値 シフト行列

1. 研究開始当初の背景

線形作用素の数域は、1918年にドイツの数学者により線形作用素の特性量として研究が開始され、その後作用素研究の中で一つの話題となっていた。1992年に米国で数域に関する国際研究集会が開催され、以来隔年で国際研究集会が開催されている。この集会で双曲型偏微分方程式との強い関連や、量子計算への誤り訂正への高次元数域が寄与することが米国の Chi-Kwong Li 氏らにより示され、また核磁気共鳴装置の制御に C-数域を応用できることがドイツの Helmke 氏らによって示され、数理科学の課題とし興味深いだけでなく、情報工学などにも数域の研究が寄与できることが示された。このような応用の基礎となるが、さまざまな型に一般化された数域または、1918年頃より Rayleigh 比の集合として研究が始まった古典的な数域の境界の研究であり、これを調べることや決定するためのアルゴリズムの確立が望まれていた。

2. 研究の目的

線形作用素を数域という複素数平面の特性量を用いて解析し、この特性量の境界の代数曲線論的性質、幾何学的な特徴の解明を行い、境界を求めるアルゴリズムを見出し、それを量子計算の誤り訂正に結びつくことが期待されている高次元数域を用いて誤り訂正への応用を図る。また、核磁気共鳴装置の制御に応用が発見されている C-数域の性質の解明を通じて、核磁気共鳴装置制御の向上等への応用の基礎を与える。

3. 研究の方法

平面図形で有限次元の作用素の数域の場合であれば、その境界が代数曲線となることがわかっているので、その定義方程式を計算する方法を、代数的に与えることや、凸解析方法により図形的な特徴を捉えることなど、数学の古典的手法を一つの軸とした。また数理処理ソフトウェアを用いての具体的例の計算など、コンピュータを用いての実験科学的な帰納法的発見もあった。これが研究方法の別の軸である。台湾の東呉大学の簡茂丁教授や、ポルトガル、コインブラ大学の Bebiano 教授など外国の研究者とも協力して研究を行った。

4. 研究成果

ヒルベルト空間の線形作用素特にシフト作用素の数域の境界についてその代数曲線論的特徴が明らかにされた。また、古典力学あるいは一般相対性理論の下での閉軌道の問題への数域の応用など当初予期していなかった成果もあった。高次元数域の境界を求めるアルゴリズムが得られた。これは、量子計算訂正の方法として寄与できる。また、クレイン空間の作用素に関連して、行列の対角成

分の積がなす領域につきその境界の計算方法がわかった。これは、核磁気共鳴装置制御に結びつき C-数域の解析にも方法的に使えることが期待できる。

以下3年間の研究計画遂行の成果について少し詳しく述べる。

次頁の図は、1の3乗根を固有値に持つ 3×3 正規行列の3つの対角成分の積をとったものの集合で、この平面領域を、コンピュータの数値計算により点集合として近似的に描き出したものである。

その形状から「涙のしずく」tear drop という愛称が付けられている。この集合は、ポルトガルのコインブラ大学の Bebiano 教授らと進めた product range と呼ばれる一般化された数域の例である。この数域の境界が4次曲線によって与えられることを、コインブラのグループとの共同研究でつきとめ、コインブラ大学の数学の教書科書シリーズの書籍“Textos de Mathematica 54”(2013年出版)所収の論文

“The main diagonal product of 3×3 normal matrices whose eigenvalues are the third roots of unity”(7頁)

で発表している。

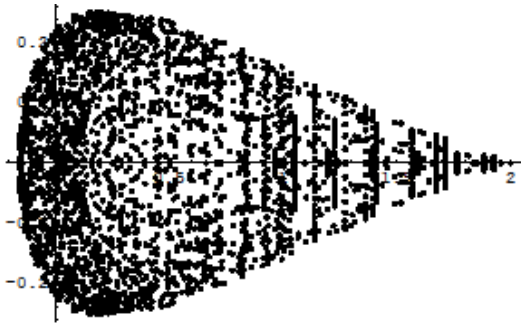
この図から想像できるように研究対象ないし研究方法の重要な部分が平面の図形であることが研究課題の特徴の一つであり、成果も可視的な性格をもったものが沢山ある。

数学的な研究手法としては、代数曲線論が基本的であり、重みつき巡回型シフトの数域の境界を生成する代数曲線の種数 genus が1以上であることを証明することができた。さらに代数曲線の次数が5,6,7,8の場合については、種数の下限の1を取る行列の例を構成することができた。

種数が0の代数曲線は有理曲線として知られ、三角多項式のグラフを用いて行列の数域の境界曲線が有理曲線となるようなものを系統的に与えることができた。種数が1の代数曲線は、楕円曲線として知られ、重みつきシフトの数域の境界は、重みをうまくとると楕円曲線になることを示せたことは、理論上の大きな成果である。

高次元数域については、その境界を求めるアルゴリズムを幾何学的に与えたほか、重みつき巡回型シフトの場合にこのアルゴリズムを実行して、境界を具体的に提示した。関連して、植物の開花などについても論文でふれた。植物の開花の過程を連想することによって、高次元数域が多角形に退化する臨界状態がいつ起こるかという問題を提起し、ルーレット曲線という典型的な場合に対して解を与えた。高次元数域を量子計算の誤り訂正へ応用することについては、それが遠大な課題であると考えているが、基礎理論の面で一定の寄与ができたと考えている。

また、C-数域および核磁気共鳴装置制御への応用についても、tear dropの研究により方法的な貢献ができたと考えている。



これより、3年間の研究改題遂行で成果として得られ発表した15編の論文により、成果のまとめを行ってことにする。

まず、論文を発表雑誌別に眺めると、Elsevier社発行の“Linear Algebra and Its Applications”(Impact Factor 0.968)掲載論文が7編、同社発行の“Journal of Mathematical Analysis and Applications”(Impact Factor 1.050)が1編、同社発行の“Applied Mathematics and Computations”(Impact Factor 1.454)で、全体の6割がElsevier社発行の雑誌による出版ということになる。

国際線形代数学会発行の“Electronic Journal of Linear Algebra”(Impact Factor 0.667)が1編、Mashad大学発行の“Banach Journal of Mathematical Analysis”(Impact Factor 0.407)が1編、“Mathematical Communications”(Mathematical Citation Quotient; 0.26, Croatia)が1編、“International Mathematical Forum”(MCQ 0.05, Bulgaria)が3編である。Linear Algebra and Its Applications誌掲載の7論文のうち、“The boundary of higher rank numerical ranges”(2011)で、高次元数域の境界を決定するアルゴリズムを幾何学的に与えている。また、“Construction of determinantal representation of trigonometric polynomials”(2011)では、三角多項式のグラフとして得られる有理曲線を数域の生成曲線としてもつ行列を構成している。このような構成をする中で、中心力力学系における角運動量保存との連想が起こり、力学的な課題への数域への応用という当初予定にない課題が浮かびあがった。当初予定にはない

課題ではあるものの、数域の応用として自然な応用であって関連する例も豊富にあることが浮かびあがり、初歩的な基礎づけが科学史との関連などについては、弘前大学大学院の博士前期学生2名、後期学生1名と取り組み、ドイツの17世紀前半に活躍したJohannes Keplerの惑星軌道モデルを行列の数域を用いて解析し、Bulgariaの出版社発行の雑誌に論文3編を発表した。さて、LAA誌掲載論文に話を戻すと、中心力力学系に関するよる専門的な問題を、数域、高次元数域を用いて解析するという形で、台湾の簡教授と取り組み、

“Determinantal representation of closed orbits”(2012)としてLAAで発表、植物の開花と高次元数域という課題を“Critical values for higher rank numerical ranges associated with roulette curves”(2012)として発表した。さらに、同時数域の凸性を、“Strict convexity of the joint c-numerical range”(2013)で扱い、巡回型の重みつきシフトの数域を“Hyperbolic forms associated with cyclic shift matrices”(2013)と“Singular points of cyclic weighted shift matrices”で扱い、境界曲線の種数が1以上となることや、複素射影空間における双対曲線の特異点がすべて実射影空間に属することなどの基本的な結果を与えた。

“Journal of Mathematical Analysis and Applications”誌掲載の論文“Central force and the higher rank numerical range”(2012)では、中心力力学系の下での閉軌道の問題を高次元数域との関係で扱い閉軌道の例を提示した。また、“Applied Mathematics and Computations”誌掲載の論文“Reduction of the joint c-numerical range”(2014)では、双曲型の偏微分方程式との関連で提起された古典的数域への帰着問題を、余因子行列の一般化であるコンパウンド行列という古典的手法で解決した。

また、“Electronic Journal of Linear Algebra”誌掲載の論文“Singular points of the ternary polynomials associated with 4x4 matrices”(2012)では、4次の代数曲線の分類理論を用いて4x4行列の数域の境界曲線の双対曲線の特異点解析により分類した。

“Banach Journal of Mathematical Analysis”誌掲載の論文“Determinantal representations of trigonometric curves via Sylvester method”(2014)では、Sylvesterの終結式にもとづき、行列式表現を実現するという新手法をBezout法の代替方法として提示した。

International Mathematical Forum誌掲載

の3論文については前述の通りであり、円軌道モデルを捨て、楕円軌道に到達するまでに、ケプラーが『新天文学』(1609年)で述べたモデルを科学史家が極座標系等を用いて厳密に定式化したものを、消去法により代数曲線として捉え、行列の数域との関係も得られた。1960年代にドイツの科学史家の Kuno Fladt 教授が、ケプラーが卵形軌道と呼んだものを現代的に厳密に扱えばどう表されるかを媒介変数表示した。それを直交座標系で表せば、4次の代数曲線であって、種数は1となることがわかった。また、ケプラーが楕円軌道モデルに到達する直前に考え「ふくらんだほつぺたのような曲線」と呼んだ曲線は8次曲線であって種数が1であることがわかった。さらに、ケプラーが考えた時期としては、この2つのモデルの時期の中間期に提起したモデルで、1980-1990年代に英国の Whiteside 教授が媒介変数で表示した軌道は12次曲線であって、種数が7となることがわかった。また、4次曲線の軌道モデルを惑星が動き、面積速度が一定であるとする、惑星の速度ベクトルが描くホドグラフは、ある 4×4 行列の数域の境界曲線になることもわかった。

研究成果の影響については、Google Scholar による検索では、

論文

“Construction of determinantal , , ” (2011) が7回、

論文 “Hyperbolic forms...” (2013) が6回、

論文 “Singular points...” (2012) が2回、

論文 “Determinantal representation...”

(2012) が2回で、合計17回であり、掲載雑誌の Impact Factor から想像される水準の影響を研究の成果が持っていることが想像される。

また、American Mathematical Society の Math. Sci. Net が公開している情報では、15論文の引用状況は、

“The boundary of higher rank...” 4

“Singular points of ternary...” 3

“Construction of determinantal ..” 2

“Hyperbolic forms...” 1

“Critical values of higher rank...” 1

“Central force and higher rank...” 1

の合計12回となっている。引用の調べ方の違いなどで、Google Scholar とは、若干違いはあるものの、ほぼ同様の引用状況を伝えている。平均的に言えば、各論文は1回程度は引用されている。1982年に研究代表者の中里博の最初の論文が出版され、以来74ほどの審査つき論文を単著あるいは共著で出版しており、AMSの情報では、引用の総数は

204となっている。10年後ないし15年後くらい後の時点では、15論文の引用が30くらいはなっていることが期待できると考えている。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び研究連携者には下線)

[雑誌論文] (計15件)

[1] Mao-Ting Chien, Hiroshi Nakazato “Reduction of joint c-numerical range”, Applied mathematics and Computations, 232(2014), 178-182.

[2] Mao-Ting Chien, Hiroshi Nakazato “Determinantal representations of trigonometric curves via Sylvester method”, Banach Journal of Mathematical Analysis, 8(2014), 269-278.

[3] Mao-Ting Chien, Hiroshi Nakazato “Hyperbolic forms associated with cyclic weighted shift matrices”, Linear Algebra and Its Applications, 439(2013), 3541-3554.

[4] Mao-Ting Chien, Hiroshi Nakazato “Singular points of cyclic weighted shift matrices”, Linear Algebra and Its Applications, 439(2013), 4090-4100.

[5] Daisuke Toyoda, Megumi Kanehira, Hiroshi Nakazato “Keplerian planetary orbits”, International Mathematical Forum, 8(2013), 567-572.

[6] Hiroshi Kawarabuki, Hiroshi Nakazato “Another question of Kepler’s so called distance law”, International Mathematical Forum 8(2013), 59-65.

[7] Megumi Kanehira, Daisuke Toyoda, Hiroshi Nakazato “Algebraic geometrical properties of Kepler’s vicarious ovum” International Mathematical Forum 8(2013), 527-536.

[8] Mao-Ting Chien, Hiroshi Nakazato “Cubic surfaces and q-numerical ranges”, Mathematical Communications 18(2013), 133-141.

[9] Mao-Ting Chien, Hiroshi Nakazato “Strict convexity of the joint c-numerical range”, Linear Algebra and Its Applications 438(2013), 1305-1321

[10] Mao-Ting Chien, Hiroshi Nakazato “Central force and the higher rank numerical range” Journal of Mathematical Analysis and Applications 389(2012) 531-540.

[11] Mao-Ting Chien, Hiroshi Nakazato “Singular points of the ternary polynomials associated with 4-by-4

matrices” Electronic Journal of Linear Algebra 23(2012), 755-769.

[12] Mao-Ting Chien, Hiroshi Nakazato “Critical values for higher rank numerical ranges associated with roulette curves” Linear Algebra and Its Applications 437(2012) 2117-2127.

[13] Mao-Ting Chien, Hiroshi Nakazato “Determinantal representations of closed orbits” Linear Algebra and Its Applications 437(2012), 992-1002.

[14] Mao-Ting Chien, Hiroshi Nakazato “Construction of determinantal representations of trigonometric polynomials”, Linear Algebra and Its Applications 435(2011), 1227-1284.

[15] Mao-Ting Chien, Hiroshi Nakazato “The boundary of higher rank numerical ranges” Linear Algebra and Its Applications 435(2011), 2971-2985.

[学会発表] (計7件)

(i) 中里博 「巡回型の重みつきシフト行列とその数域」2013年12月21日、関数空間セミナー、東京理科大学理学部.

(ii) 中里博 “Analysis of weighted cyclic shift matrices”, 2013年11月24日、作用素・作用素環論研究集会、お茶ノ水女子大学.

(iii) Hiroshi Nakazato “Numerical range associated with a closed orbit under a central force”, 2012年7月10日、11th Workshop of Numerical Ranges and Numerical Radii, 台湾、高雄市、国立中山大学.

(iv) 中里博 “Compound matrix and its applications to numerical ranges”, 2012年12月24日、第21回関数空間セミナー、東京理科大学.

(v) 中里博 “Determinantal representations and numerical ranges”, 2011年12月25日、第20回関数空間セミナー、北海道大学理学部.

(vi) 中里博 “Numerical range of a matrix associated with the graph of a trigonometric polynomial”, 2011年11月15日、京都大学数理解析研究所研究集会「スペクトル、数域などの作用素の幾何学的な特性量を用いた作用素の構造研究」、京都大学数理解析研究所

(vii) 中里博 「中心力の下での質点の運動を行列の数域を用いて解析する」2011年11月6日、

作用素論・作用素環論研究集会、琉球大学理学部.

[図書] (計1件)

“Textos de Mathematica”
(Coimbra University 発行、2013年)

所収論文 Hiroshi Nakazato
Alexander Koacec, Natalia Bebiano, Joao da Providencia “The main diagonal products of 3x3 normal matrices whose eigenvalues are the third roots of unity”

(7頁)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

中里 博(弘前大学大学院理工学研究科)

研究者番号 10188922