

平成 26 年 6 月 13 日現在

機関番号：32601

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2011～2013

課題番号：23540183

研究課題名(和文) 確率解析とその微分作用素の研究への応用

研究課題名(英文) Stochastic analysis and its application to differential operators

研究代表者

松本 裕行 (Matsumoto, Hiroyuki)

青山学院大学・理工学部・教授

研究者番号：00190538

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,700,000円、(間接経費) 1,110,000円

研究成果の概要(和文)：基本的な確率過程であるベッセル過程の出発点とは異なる点への到達時刻に関して研究を進めた結果が最大の成果である。出発点の方が原点から遠い場合に、ベッセル関数の零点を用いて確率密度の比較的簡明な具体形を与えた。応用として、確率密度および尾確率の漸近挙動を調べた。また、ブラウン運動の管状近傍の体積の期待値について漸近挙動を与えた。逆に、変形ベッセル関数の零点のみならず代数方程式を発見した。

研究成果の概要(英文)：The most important result is the result on the first hitting times of Bessel processes which is one of the fundamental stochastic processes. When the starting point is far from the origin than the terminal point, we have shown fairly simple expressions for the probability densities by means of the zeros of the modified Bessel functions. As applications, we have investigated the asymptotic behavior of the probability densities and the tail probabilities. We have also shown the asymptotics of the expected volume of the tubular neighborhood of Brownian motions. On the other hand, we have found some algebraic equations which are satisfied by the zeros of the Modified Bessel functions.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：ベッセル過程 到達時刻 変形ベッセル関数

1. 研究開始当初の背景

代表者の松本は、確率解析を用いて微分作用素の解析を行ってきた。特に近年は、双曲空間上のラプラシアン解析の研究してきた。双曲空間上のブラウン運動が確率微分方程式を解くことにより、ウィナー汎関数としての具体的な表現をもつことから、熱核の性質を調べ、セルバーグ跡公式の証明に応用するなどの成果を挙げてきた。

最近では、ポアソン核の解析を行うために、ブラウン運動が幾何ブラウン運動を用いて表示されることから、ベッセル過程の到達時刻の確率分布を具体的に表示するという問題を研究していた。ポアソン核は解析の基本的な道具であり、研究の進展が望まれていた。

一方、共同研究者の濱名は、Wiener sausage の体積の期待値の研究を進めており、その時間パラメータを無限大にしたときの挙動を考察するためには、ベッセル過程の到達時刻の確率分布の漸近挙動が必要であることを見抜き、奇数次元の場合に結果を得ていた。奇数次元の場合には、指数が整数に $1/2$ を加えた半整数である変形ベッセル過程が現れ、これが本質的に多項式であることが証明の基本であった。偶数次元の場合には、このような形にはならず、重要な問題として残されていた。

ベッセル過程は最も基本的な確率過程であり、また到達時刻の分布はポアソン核のみならずさまざまな研究の基本的な道具を与えることもあり、共同研究を始めることにした。ベッセル過程の出発点が到達点よりも原点に近い場合は、原点が自然境界にはならないことから、生成作用素のスペクトルが離散スペクトルのみからなり、これを用いて到達時刻の分布を表示できることが知られているので、逆の出発点の方が原点から遠く、自然境界である無限遠を境界として考える場合に力を注ぐこととなった。

その際、ポーランドの研究者が類似のことを最近研究しており、参考にした。

また、階数が2以上のリーマン対称空間上の確率解析は多くは知られていなかったし、今も研究は多いとはいえない。この研究を推進するために、典型的な例であり先行研究も幾つか知られている正定値行列全体のなす空間やジゲルの上半平面と呼ばれる複素行列の空間上の解析を始めたいと考えていた。

研究開始当初は山形大学に勤務しており、計算機に詳しい脇氏の力を借りることで、次元が低い場合に計算機も用いて研究が進められるという環境にあった。

2. 研究の目的

まずはベッセル過程の到達時刻の確率分布の具体形と時間パラメータを無限大にしたときの漸近挙動を与えることを第一の目標とした。奇数次元の場合の濱名氏の結果から変形ベッセル関数の比に対する留数計算

から始めることとした。

ベッセル過程の到達時刻の研究を、双曲空間上のブラウン運動の漸近挙動の研究や熱核、ポアソン核などの解析的諸量の研究へ応用することも目標とした。

また、行列の空間上の確率解析に関しては、次数に関して漸化式的な関係が見えるようなラプラシアンの表示を発見することを目標とした。その際、可能であれば、次元の低い場合の代数的な計算に計算機の助けを求めることとした。

3. 研究の方法

ベッセル過程に関しては、共同研究者の濱名氏と、電子メールによる日常的な研究連絡と本補助金を利用した相互訪問による共同研究を行うことで研究を進めた。研究集会や学会などで積極的に発表をして、多くの関連研究者の知識を尋ね、我々の研究に対する意見を聞いた。問題が、最も基本的な確率過程に関するものであり、過去の研究との関連も可能な限り調べたつもりである。

確率解析に詳しい共同研究者の谷口氏とは、やはり電子メールと相互訪問により、多様体上の確率過程に関する共同研究を行った。

正定値行列は、多変量の確率変数の共分散行列を考えると、自然に確率論、統計学に現れる。実際、特殊関数の研究などが、統計学と表現論において独立に研究されていた時期もある。研究分担者の神保氏は、長年統計学に関する研究を進めてきており、統計学的な観点から正定値行列の解析に加わって貰った。

代表者の松本が、現在の職場に転出してからも、日常的な電子メールなどによる研究連絡とともに、本補助金を利用して松本が山形大学に行き、研究分担者の脇氏と計算機を用いた研究、議論を行った。

最終年度には、計算機にも明るい平尾氏を研究分担者に加えて、すべての議論に参加してもらうとともに、氏の援助のもとでホームページを開設して、研究成果の公表の一助とした。

4. 研究成果

ベッセル過程の到達時刻の確率分布と確率密度を、変形ベッセル関数の複素零点を用いた具体的な表示を与えた。この結果を用いて、尾確率の時間パラメータを無限大にしたときの漸近挙動を与えた。

まず、到達時刻の確率分布のラプラス変換が変形ベッセル関数の商で与えられるという、一次元拡散過程の一般論によって古典的によく知られた結果から研究を開始した。結果の知られていない出発点が到達点よりも原点から遠くにある場合は、変形ベッセル関数として Macdonald 関数と呼ばれる第2種の関数が現れる。

第2種変形ベッセル関数は、指数に応じて

有限個の零点をもつことが知られているので、標準的な文献に基づいて、留数計算により変形ベッセル関数の商であるラプラス変換を、逆変換の可能な形に書き換えた。ポーランドの研究者も類似の書き換えを行っていたが、我々の表示の方が簡明な形であった。

この結果に基づき、ラプラス逆変換を実行することで、すべての指数に適用できる到達時刻の分布関数、確率密度の具体的な表示を第2種ベッセル関数の零点を用いて与えた。

さらに、具体的な表示を用いて、尾確率および確率密度の時間パラメータを無限大にしたときの漸近挙動を示した。ただ、指数が半整数の奇数次元ブラウン運動の動径成分を与える場合は、第2種ベッセル関数の形の特殊性から、漸近挙動は別に扱う必要があった。なお、2次元ブラウン運動に対応する指数0の場合は、全く別の挙動をすることも示すことができた。

整数次元の場合の結果を、ウィナー過程の管状近傍の体積の期待値の研究に応用し、次元の偶奇による違いを明らかにした。しかし、計算により違いを示したのであり、直感的な理由は未解決なままである。

一次元拡散過程の到達時刻の確率分布は、一般に無限分解可能であることが知られているので、ベッセル過程の場合にレヴィ測度の具体的な表示を求めた。この場合は、第2種変形ベッセル関数の対数微分を計算することで結論が得られるが、確率分布の具体形を得るための議論が役に立った。むしろ、こちらの方が容易であった。

このレヴィ測度を求める過程において、第2種ベッセル関数の零点に対する簡明な等式を証明することとなった。これまでの研究は、零点は知られているものとして、零点を用いて結果を得るということであったが、この等式により、逆に零点を研究することができることが判明した。

結果として、第2種変形ベッセル関数の零点のみたす代数方程式を与えた。その係数は、変形ベッセル関数の積分で与えられ、数値計算が Mathematica 程度の計算機ソフトを用いて可能である。指数が整数の場合に数値解析の研究が幾つか知られており、我々の作成した零点の数表と結果は、当然のことながら一致した。すべての指数に対して適用される簡明な代数方程式であり、利用範囲は広いものと思われる。結果は白井朋之氏を交えた3名の共同研究として発表の予定である。

双曲空間上のブラウン運動の漸近挙動に関しては、数学的な応用はできるものの、幾何学的に重要な結果については既に松本が得ていた結果以上の結果を得るには至らなかった。

また、ベッセル過程の研究が予想外の方向に大きく進展したこと、研究開始以降に確率解析の著書を著す計画が持ち上がったため、正定値行列の空間上の確率解析を研究する時間はとれなかった。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計3件)

Y.Hamana and H.Matsumoto, Asymptotics of the probability distributions of the first hitting times of Bessel processes, Electron. Commun. Probab. Vol. 19 (2014), no.5, 15.

Y.Hamana and H.Matsumoto, The probability distribution of the first hitting time of Bessel processes, Trans. Amer. Math. Soc., Vol.365 (2013), no. 10, 5237-5257.

Y.Hamana and H.Matsumoto, The probability densities of the first hitting times of Bessel processes, J. Math-for-Industry, Vol. 4 (2012B-2), 91-95.

〔学会発表〕(計8件)

松本裕行, ベッセル過程の到達時刻の尾確率について, 確率論シンポジウム, 平成 25 年 12 月 12 日, 京都大学.

松本裕行, Distributions of hitting times of Bessel processes and zeros of modified Bessel functions, 確率解析とその周辺, 平成 25 年 9 月 21 日, 京都大学.

H.Matsumoto, First hitting times of Bessel processes and zeros of modified Bessel functions, East Midland Stochastic Analysis Seminar, 平成 25 年 8 月 30 日, Warwick 大学.

H.Matsumoto, First hitting times of Bessel processes and zeros of modified Bessel functions, Levy Conference, 平成 25 年 7 月 15 日, Wroclaw 工科大学.

松本裕行, 濱名裕治, ベッセル過程の到達時刻の分布について, 日本数学会, 平成 24 年 9 月 18 日, 九州大学.

濱名裕治, 松本裕行, 偶数次元 Wiener sausage の体積の期待値について, 日本数学会, 平成 24 年 9 月 18 日, 九州大学.

濱名裕治, 松本裕行, The probability distribution of the first hitting times of Bessel processes, 確率解析とその周辺, 平成 23 年 11 月 11 日, 佐賀大学.

松本裕行, 濱名裕治, The probability distribution of the first hitting times of Bessel processes, 日本数学会, 平成 23 年 9 月 28 日, 信州大学.

〔図書〕(計1件)

谷口説男, 松本裕行, 確率解析, 2013 年, 302 ページ, 培風館.

〔その他〕

ホームページ等

<http://www.gem.aoyama.ac.jp/~matsumoto/>

6 . 研究組織

(1)研究代表者

松本裕行(Hiroyuki Matsumoto)

(青山学院大学理工学部教授)

研究者番号：00190538

(2)研究分担者

谷口説男(Setsuo Taniguchi)

(九州大学基幹教育院教授)

研究者番号：70155208

神保雅一(Masakazu Jimbo)

(名古屋大学大学院情報科学研究科教授)

研究者番号：50103049

脇克志(Katsushi Waki)

(山形大学理学部教授)

研究者番号：30250591

平尾将剛(Masatake Hirao)

(東京女子大学現代教養学部講師)

研究者番号：90624073