

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 15 日現在

機関番号：12102

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2011～2015

課題番号：23540185

研究課題名(和文)無限回微分可能函数の枠組においてコーシー問題が適切となる双曲型方程式の特徴付け

研究課題名(英文)Characterization of hyperbolic operators for which the Cauchy problem is well-posed in the framework of infinitely differentiable functions

研究代表者

若林 誠一郎(WAKABAYASHI, SEIICHIRO)

筑波大学・名誉教授

研究者番号：10015894

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,900,000円

研究成果の概要(和文)：主部の係数が時間変数の実解析函数で、低階の係数も時間変数のみに依存する2重特性的である高階双曲型方程式に対して、コーシー問題の C^∞ 適切性のための十分条件を得た。この十分条件が、空間次元が2以下のとき、または主部の係数が時間変数の半代数函数(例えば多項式)のとき、必要条件でもあることを示した。さらに、低階の係数が、空間変数にも依存する場合に、2重根の個数に制限を置いて、同様の結果を得た。係数が時間変数のみに依存する3階の双曲型方程式に対するコーシー問題に対して、subprincipal symbolと1階の項に条件をおく形で、 C^∞ 適切性のための十分条件を与えた。

研究成果の概要(英文)：I considered the Cauchy problem for higher-order hyperbolic operators with coefficients depending only on the time variable. In the case where the coefficients of the principal parts are real analytic functions of the time variable, I obtained a sufficient condition for C^∞ well-posedness. And I showed that this sufficient condition is also a necessary one when the space dimension is less than 3 or the coefficients of the principal parts are semi-algebraic functions (e.g., polynomials) of the time variable. Moreover, in the case where the coefficients of the lower-order terms also depend on the space variables, I obtained a similar results under restrictions on the number of the double characteristic roots.

I gave sufficient conditions for C^∞ well-posedness of the Cauchy problem for third-order hyperbolic operators whose coefficients depend only on the time variable, in the form of imposing conditions on the subprincipal symbols and the first-order terms.

研究分野：数学・基礎解析学

キーワード：双曲型作用素 コーシー問題 C^∞ 適切性 超局所解析

1. 研究開始当初の背景

双曲型方程式に対するコーシー問題が C 適切になるためには、一般に低階項(の表象)に条件を課す必要があり、これに関しては多くの先行研究がある。単独高階双曲型方程式に限って記せば、まずペトロフスキーの狭義双曲型方程式に対するコーシー問題の C 適切性 (L^2 適切性) についての研究やゴールドディングによる定数係数双曲型方程式に対するコーシー問題の C 適切性の特徴付けの研究が挙げられる。1970年代以降、超局所解析の手法を用いて、変係数の弱双曲型方程式に対するコーシー問題の C 適切性の研究が活発に続けられてきて、特性根の重複度が一定な双曲型作用素に対する低階項の満たすべき条件(大矢・溝畑・シャザラン・フラシユカ・ストラングの各氏による)や強双曲型作用素(どんな低階に対しても、そのコーシー問題が C 適切になる双曲型作用素)の特徴付け(必要条件についてはイブリー・ペトコフ氏、十分条件については岩崎氏による)等の結果が得られている。さらに主部が定数係数である場合の C 適切性の特徴付け(若林による)や、2階2変数で係数が解析的である双曲型作用素に対するコーシー問題の C 適切性の特徴付け(西谷氏による)が得られている。梶谷・若林によって、コーシー問題の C 適切性の十分条件の研究が、超局所カルレマン型評価の導出の問題に帰着され、その後の研究において、種々の超局所カルレマン型評価が導出され、コーシー問題の C 適切性の研究が進展した。研究代表者(若林)は最近、特性根の重複度が一定である場合や主要部が定数係数である場合を含むより広いクラス的双曲型方程式に対して、コーシー問題の C 適切性の特徴付けを得た。このように主部に制限を置いて、コーシー問題の C 適切性の必要十分条件を与えるいくつかの結果が知られている。係数が時間変数のみに依存する最も基本的な場合でさえ、十分な結果が得られていなかった。ピザ大学のスパニョーロ・コロンビーニ氏及びピザ大学関係者によって、興味ある結果が得られているが、コーシー問題の C 適切性の特徴付けの観点から見て、全く不十分なものであった。その後、主部の係数が時間変数のみに依存し実解析的である双曲型方程式に対して、研究代表者(若林)によって、2階の方程式に対しては、コーシー問題の C 適切性の必要条件・十分条件が得られた。しかし、主部の係数が時間変数のみに依存する高階の双曲型方程式に対しては、満足すべき結果が得られていない状況であった。ましてや、一般の双曲型方程式に対しては、コーシー問題の C 適切性の必要十分条件(特徴付け)の予想すらない状況であった。コーシー問題の C 適切性の必要十分条件が得られる双曲型方程式のクラスを広げていくことが望まれていた。

2. 研究の目的

有限の伝播速度をもつ現象を記述すると考えられる双曲型方程式に対して、そのコーシー問題(初期値問題)が C 函数の枠組で適切になる(解が一意的に存在する)ための必要十分条件(特徴付け)を、できるだけ弱い仮定の下で得ることを目的とする。さらに解の構造・性質・挙動についても考察する。特に、

(1) 主部の係数が時間変数のみに依存する2重特性的な高階双曲型方程式に対するコーシー問題の C 適切性の必要十分条件を得る。

(2) 主部の係数が時間変数のみに依存する一般の双曲型方程式に対して、コーシー問題の C 適切性の必要十分条件が得られるような双曲型方程式のクラスを広げていくことを目指す。

(3) 主部の係数が時間変数のみに依存する2階双曲型方程式のコーシー問題の解の特異性を調べる。さらに、得られた結果を、高階の場合に拡張する。

(4) 一般の双曲型方程式に対するコーシー問題の C 適切性の特徴付けのために、いくつかのモデル方程式を考察することにより、どのような条件を課すべきかについての予想をたてる。

3. 研究の方法

(1) 主部の係数が時間変数のみに依存する2階双曲型方程式に対して、特異性の伝播に関する梶谷・若林の一般論を改良して、そのコーシー問題の解の特異性(波面集合)の評価を与える。

主部の係数が時間変数のみに依存しかつ実解析的である高階双曲型方程式を対象に、以下の(2)~(5)について考察する。

(2) そのコーシー問題の C 適切性の十分条件を、2階の場合の方法を参考にして研究する。すなわち、重み函数を如何に導入すべきかについて考察し、その重み函数を用いて、エネルギー不等式を導く。

(3) (2)で得られた十分条件が、主部の係数が実解析的で空間次元が2次元、または、主部の係数が半代数函数であるとき、 C 適切性の必要条件になっていることを証明する。証明は、イブリー・ペトコフの方法を適用し、条件を満たさないとき、コーシー問題が C 適切であれば成り立つエネルギー不等式を満たさない漸近解を構成する。

(4) 一般の高階双曲型方程式を考える手掛かりとして、3階の方程式を考察する。1階の項にどのような条件をおくべきかを考え、その条件を一般の高階方程式に拡張することによって、高階方程式に対するコーシー問題の C 適切性の特徴付けのための予想を得る。

(5) 以上の研究を、コーシー問題の C 適切性の必要十分条件(特徴付け)の研究につなげていく。

(6) 研究集会・セミナー等での発表・議論を通して国内外の研究者との研究交流を図り本研究を発展させる。

4. 研究成果

(1) 主部の係数が時間変数にのみ依存する 2 階双曲型方程式を考察して、主部の係数が実解析的であると仮定して、そのコーシー問題が C 適切になるための十分条件を先行研究で与えたが、その条件の下で、コーシー問題の解の C 特異性(波面集合)が broken null bicharacteristics (零陪特性帯を 2 重特性点で分岐させてつないだもの)に沿って伝播することを示した(以前の研究で大枠はできていたが、細部にわたり厳密な証明を与えて、論文として完成させた)。これは、C 特異性の伝播は以前に研究代表者の定義した「一般化されたハミルトン流」に沿って伝播するという予想が、この場合にも正しいことを示すものである。

(2) 研究代表者の先行研究で、主部の係数が時間変数にのみ依存する 2 階の双曲型方程式に対して、そのコーシー問題が C 適切になるための十分条件を subprincipal symbol に対する条件として与え、その条件が、空間次元が 2 以下であるかまたは主部の係数が半代数関数であるとき、必要条件にもなっていることを示した。この結果を高階の双曲型方程式に一般化して、まず、係数が時間変数にのみ依存する 2 重特性的である高階双曲型方程式に対して、同様の結果が成り立つことを示した。十分条件に関しては、方程式を空間変数でフーリエ変換してパラメータ付きの常微分方程式に帰着する。常微分方程式のコーシー問題の解の一意存在は既知であるので、その解がフーリエ逆変換できることをエネルギー不等式を用いて示した。すべての係数が時間変数にのみ依存しかつ 2 重特性的であるときは、ほぼ満足のいく結果である。

(3) 主部の係数が時間変数にのみ依存する 2 重特性的である高階双曲型方程式(低階は空間変数に依存してもよい)に対して、2 重根の個数に制限を置いて、そのコーシー問題が C 適切になるための十分条件を、subprincipal symbol を用いて与え、上と同じ意味で、その条件が必要条件になっていることを示した。必要条件においては、2 重根の個数に関する制限を必要としないが、十分条件における 2 重根の個数に関する制限を除くことが、今後の課題である。重み関数を適切に定義して、それがヘルマンダーの意味での重み関数になっていることを示し、擬微分作用素のカリキュラスにのせるために、

かなり技術的な工夫を必要としたが、逆にこれがネックになって、2 重根の個数に制限が必要になってしまった。また十分条件の証明において、係数及びデータを実解析関数の空間に近い Gevrey 族の関数で近似し、近似に関して一様なエネルギー不等式を導いて、コーシー問題の C 適切を証明した。必要条件に関しては、上記(2)の場合と同様、空間次元が 3 以上の場合は、タルスキー・ザイデンベルグの定理を適用して、ピユイズー級数の形で漸近解を構成することにより、その条件が必要条件であること示した。

(4) 3 階の双曲型方程式で係数が時間変数にのみ依存する場合に、subprincipal symbol 及び、1 階の項に対しては、いわゆる「sub-sub-principal symbol」を定義して、それに条件を課して、コーシー問題が C 適切になることを示した。これは、問題に応じて「sub-sub-principal symbol」を如何に定義すべきかを示す一例になっている。ここで課した条件は、いくつかの特別な場合には、必要条件にもなっていて、今までには知られていない新しい条件である。一般の双曲型方程式に対して、「sub-sub-principal symbol」及びその一般化を如何に定義すべきかということが、今後の研究を進める上で非常に重要になってくるという知見を得た。この「sub-sub-principal symbol」は本研究で初めて発見・定義されたものである。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 3 件)

若林誠一郎, On the Cauchy problem for a class of hyperbolic operators whose coefficients depend only on the time variable, Tsukuba J. Math., vol. 39 no. 1, 121-163, 2015 年. 査読有り

若林誠一郎, Singularities of solutions to the Cauchy problem for a class of second-order hyperbolic operators, Funkcialaj Ekvacioj, vol. 57 no. 3, 375-448, 2014 年. 査読有り

若林誠一郎, On the Cauchy problem for second-order hyperbolic operators with the coefficients of their principal parts depending only on the time variable, Funkcialaj Ekvacioj, vol. 55 no. 1, 99-136, 2012 年. 査読有り

[学会発表](計 5 件)

若林誠一郎、主部の係数が時間変数のみに依存する2重特性的な双曲型作用素に対するコーシー問題、第31回松山キャンプ, 2016年1月5日, 山口大学(山口県山口市)

若林誠一郎、係数が時間変数のみに依存する2重特性的な双曲型作用素に対するCauchy問題、第30回松山キャンプ, 2015年1月5日, 山口大学(山口県山口市)

若林誠一郎、On the Cauchy problem for a class of hyperbolic operators whose coefficients depends only on the time variable, 第10回AIMS, 2014年7月9日, Madrid, ICMAT (Spain)

若林誠一郎、係数が時間変数のみに依存する3階双曲型作用素について、第29回松山キャンプ, 2014年1月5日, 山口大学(山口県山口市)

若林誠一郎、Singularities of solutions to the Cauchy problem for a class of second-order hyperbolic operators, 第9回ISAAC, 2013年8月9日, Krakow, Pedagogical University (Poland)

[その他]

ホームページ

<http://www.math.tsukuba.ac.jp/~wkbysh/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

若林 誠一郎 (WAKABAYASHI SEIICHIRO)

筑波大学・ 名誉教授

研究者番号: 10015894