

平成 26 年 6 月 5 日現在

機関番号：12601

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2011～2013

課題番号：23540187

研究課題名(和文) Morrey型空間と加重付きノルム不等式

研究課題名(英文) Morrey spaces and weighted norm inequalities

研究代表者

田中 仁 (TANAKA, Hitoshi)

東京大学・数理(科)学研究科(研究院)・助教

研究者番号：70422392

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,800,000円、(間接経費) 840,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では、多重劣線形最大作用素および多重劣線形分数積分作用素に対し、Morrey型ノルムによる加重付きノルム不等式を考察し、加重が満たす適切な十分条件を与えることに成功しました。また、一般化された分数積分作用素に対し、局所Morrey型ノルムによる加重をより一般的な測度へ拡張したノルム不等式を考察し、測度が満たす適切な十分条件を与えることに成功しました。さらに、最大作用素に対する加重付きMorreyノルム不等式が成立するための必要条件、十分条件をそれぞれ与え、特にべき型の加重については必要十分条件を得てその完全な特徴付けに成功しました。

研究成果の概要(英文)：In this research, a theory of weights for multilinear fractional integral operators and multi(sub)linear fractional maximal operators in the framework of Morrey spaces is developed. Natural sufficient conditions for the one and two weight inequalities of these operators are given, and, as a corollary, the Olsen inequality for multilinear fractional integral operators is obtained.

The local trace inequality for potential type integral operators in the framework of Morrey spaces is studied and the sufficient conditions for the norm inequality with a locally finite nonnegative Borel measure of potential type integral operators to hold are given. Necessary condition and sufficient condition for two-weight norm inequalities on Morrey spaces to hold are given for the Hardy-Littlewood maximal operator. Necessary and sufficient condition is also verified for the power weights.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学 基礎解析学

キーワード：Morrey space weighted norm inequality Riesz potential positive operator

### 1. 研究開始当初の背景

C. Morrey は、1938年に楕円型偏微分方程式の解を量的に精密に記述することをその動機として、Morrey 空間を導入しました。この関数空間は、関数の局所的な regularity を Lebesgue 空間よりも定量的に精密に記述できることから、偏微分方程式論等で盛んに用いられています。分数積分作用素は、Riesz ポテンシャルとも言われ、Laplace 方程式の解を記述することのできる基本的で重要な作用素です。

P. Olsen は、1995年に Morrey ノルムによる分数積分作用素に対する双線形ノルム不等式を示しました。Olsen の不等式は、加重付きノルム不等式であるとも考えられて、Schrodinger 作用素の固有値問題に基本的に用いられる Lebesgue 空間上の trace 不等式 (または Fefferman-Phong の不等式) を、Morrey 空間上へ拡張したものであると解釈できます。

Olsen の証明は、しかし、実解析で基本的な手法である C-Z 分解が陰的に用いられていて複雑な計算を要するものです。私は、その複雑さの解析を進める中で、分数積分作用素を 2 進立方体を用いて分解する C. Perez の巧妙な方法を適用し、分数積分作用素と分数最大作用素とを Morrey 空間の枠組みで結ぶ不等式を見出しました。そして、この不等式を適用することで Olsen の不等式の改善に成功しました。私が見出した手法は、Olsen の複雑さを決定的に解消して、その証明が初等的であるために容易により複雑な設定の下に拡張しうるものです。実際、我々は、一般化された分数積分作用素と一般化された分数最大作用素との関係を、Morrey 型空間の枠組みで結ぶ、新たなノルム不等式をこの手法を用いて確認することができました。

### 2. 研究の目的

本研究は、Morrey 型ノルムによる分数積分作用素等の加重付きノルム不等式の改良、多重劣線形最大作用素の視点に立つ局所的加重付きノルム不等式の開発、同視点に立つ Kakeya 最大作用素の加重付きノルム不等式の改善の三つをその目的とします。具体的には以下の結果を得ることをその目的とします。

多重線形分数積分作用素に対する Olsen の不等式を示す。

背景の空間をユークリッド空間から斉次測度空間へ拡張して、Olsen の不等式を示し、さらに、分数積分作用素と BMO 関数とのコミュテータを取り扱う。

背景の空間をさらに非斉次測度空間へ拡張して、Olsen の不等式を示す。

### 3. 研究の方法

実解析的手法による調和解析の分野において、多重線形作用素の解析は現在世界的な一つの潮流となっています。その中で得られた

知見と我々の有している知識とを用いて Olsen の不等式を考察することにより、Morrey 型空間が多重線形作用素の研究において果たす役割を明らかにすることは、意義深いものであると考えます。

また、斉次測度空間・非斉次測度空間上での解析は、他分野への応用の視点からも興味深いものであります。

本研究で特徴的な手法は、まず、多重線形作用素の評価において、各関数の Morrey ノルムの積に変えて、それらの相互作用を記述できる新たな量を導入すること、ついで、これまでに注意が払われてこなかったように思われる、1 よりも小さな指数の Morrey 空間を用いた評価を進めることにあります。多重線形作用素の評価において、1 よりも小さな指数を考察することは必須なものであります。

### 4. 研究成果

本研究は、Morrey 型ノルムと多重劣線形最大作用素とを用いて、幾つかの作用素に対する加重の理論を局所的な視点から構築することをその目的としました。これらの目的は十分達成できたと思います。さらに、研究を進める過程で当初は意図していなかった新たな結果を得ることができました。まず、具体的に設定した目的について記述します。

「多重線形分数積分作用素に対する Olsen の不等式を示す。」この目的はより一般的な二つの加重に対する加重付ノルム不等式を示すことに成功し、その特殊な場合として成立を確認できました。目標は達成できたと思います。

「背景の空間をユークリッド空間から斉次測度空間へ拡張して、Olsen の不等式を示し、さらに、分数積分作用素と BMO 関数とのコミュテータを取り扱う。」当初の目標は斉次測度空間への拡張でしたが、本質的に違わないと考え、それよりも狭い doubling 測度を置いたユークリッド空間として拡張を図りました。拡張は成功しましたが、一般の測度について記述するために複雑な定式化が必要となりました。また、分数積分作用素と BMO 関数とのコミュテータを調べる研究は私自信では着手しませんでした。しかし、共同研究者が我々の手法をそのまま用いることで成立を確認しています。

「背景の空間をさらに非斉次測度空間へ拡張して、Olsen の不等式を示す。」この研究は研究を進める過程で視点が変わり当初の意図とは違うものになりました。

作用素をより一般化しその振る舞いを一般の測度空間において調べた他の研究結果を知り、Olsen の不等式を含む一般の正作用素に対する研究を進めました。すなわち、分数積分作用素を一般化した正作用素に対し、背景の空間を一般の測度空間として加重付きノルム不等式の研究を進めました。

新たな道具として、一般の測度を考察するために Wolff ポテンシャルを用いた解析を導入

しました。幸運にも、この解析は非常に汎用性の高いものであったようです。この手法により、martingale の枠組みにおいて正作用素及び最大作用素の加重付き評価に関する研究を進めることができました。

正作用素とは、分数積分作用素を離散化したものであります。分数積分作用素を離散化し評価する手法は、私が近頃もっぱら用いているものでした。この離散化の手法を、分数積分作用素よりもさらに特異性の高い特異積分作用素にも適用できないかということは、誰もが思い至ることであって、私も試みてはいましたが、困難であって成功できずにおりました。ところが、Petermichl, Nazarov, Treil, Volberg 等はこの困難をみごと克服し、これに成功しました。この特異積分作用素の離散化による解析は、特に加重の理論の精密化に寄与しており、近年もっとも活発に研究されているテーマです。そして、この研究が一つの動機となって、2進立方体に依拠した離散化の理論の再認識とその復権とは一つのトピックを成しています。

我々の研究は、この発展しつつある理論を、2進立方体が持っている構造を含む、より一般的な martingale の枠組みにおいて展開しようと意図するものであります。我々が得た一つの結果として、正作用素が有界となるためのその核が満たすべき必要十分条件を与えることに成功しました。すなわち、有界となるための核の完全な特徴付けに成功しました。非常に興味深いことに、その条件は Morrey 型のノルムを用いた条件式によって表現されています。私は、ここに、数学の一つの深淵を見たように思いました。

Morrey 空間は、定義の中に上限を取る形で無限を内包しその解析を難しくして、最大作用素を有界とする加重の特徴づけも困難です。Lebesgue 空間では、それは Muckenhoupt のクラスとして完全に整備されています。私は、Morrey 空間において Muckenhoupt のクラスに類似する特徴付けの研究を進め、最大作用素に対する加重付き Morrey ノルム不等式が成立するための必要条件、十分条件をそれぞれ与え、特にべき型の加重については必要十分条件を得てその完全な特徴付けに成功しました。これは着実な進歩であると信じています。

最後に、Kekeya 問題に関連して、2次元座標平面上で方向極大関数に対する動径的加重月ノルム不等式が成立するための一つの十分条件を与えることに成功しました。また、Kekeya の最大関数が変動指数 Lebesgue 空間で有界となる指数が満たすべき十分条件を調べ研究しました。

##### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌文](計16件)論

Tanaka H.: "A characterization of two-weight trace inequalities for positive dyadic operators in the upper triangle case" *Potential Anal.*, online.

Saito H. and Tanaka H.: "Directional maximal operators and radial weights on the plane" *Bull. Austral. Math. Soc.*, 査読有、89 (2014), No. 2, 397--414.

Gala S., Ragusa M., Sawano Y. and Tanaka H.: "Uniqueness criterion of weak solutions for the dissipative quasi-geostrophic equations in Orlicz-Morrey spaces" *Appl. Anal.*, 査読有、93 (2014), No. 2, 356--368.

Iida T., Sawano Y. and Tanaka H.: "Atomic decomposition for Morrey spaces" *Z. Anal. Anwend.*, 査読有、33 (2014), No. 2, 149--170.

Gala S., Sawano Y. and Tanaka H.: "On the uniqueness of weak solutions of the 3D MHD equations in the Orlicz-Morrey space" *Appl. Anal.*, 査読有、92 (2013), No. 4, 776--783.

Tanaka H. and Gunawan H.: "The local trace inequality for potential type integral operators" *Potential Anal.*, 査読有、38 (2013), No. 2, 653--681.

Tanaka H.: "Two-weight norm inequalities for potential type integral operators in the case  $p > q > 0$  and  $p > 1$ " *Studia Math.*, 査読有、216 (2013), No. 1, 1--15.

Tanaka H. and Terasawa Y.: "Positive operators and maximal operators in a filtered measure space" *J. Funct. Anal.*, 査読有、264 (2013), No. 4, 920--946.

Tanaka H. and Terasawa Y.: "A characterization for the boundedness of positive operators in a filtered measure space" *Arch. Math. (Basel)*, 査読有、101 (2013), No. 6, 559--568.

Sawano Y., Sugano S. and Tanaka H.: "A bilinear estimate for commutators of fractional integral operators" *RIMS Kkyroku Bessatsu B43: Potential Theory and its Related Fields* ed. K. Hirata, 査読有、September, 2013.

Iida T., Sato E., Sawano Y. and Tanaka H.: "Weighted norm inequalities for multilinear fractional operators on Morrey spaces" *Studia Math.*, 査読有、205 (2011), No. 2, 139--170.

Sawano Y., Sugano S. and Tanaka H.: "Orlicz-Morrey spaces and fractional operators" *Potential Anal.*, 査読有、36 (2012), No. 4, 517--556.

Iida T., Sato E., Sawano Y. and Tanaka H.: "Multilinear fractional integrals on Morrey spaces" *Acta Math. Sin. (Engl. Ser.)*, 査読有、28 (2012), No. 7, 1375--1384.

Iida T., Sato E., Sawano Y. and Tanaka H.: "Sharp bounds for multilinear fractional integral operators on Morrey type spaces" *Positivity*, 査読有、16 (2012), No. 2, 339--358.

Gala S., Sawano Y. and Tanaka H.: "A new

Beale-Kato-Majda criteria for the 3D magneto-micropolar fluid equations in Orlicz-Morrey spaces” Math. Methods Appl. Sci., 査読有、35 (2012), No. 11, 1321--1334.

Gunawan H., Nakai E., Sawano Y. and Tanaka H.: “Generalized Stummel class and Morrey spaces” Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.), 査読有、92(106) (2012), 127--138.

〔学会発表〕(計3件)

Tanaka H.: “A characterization of two weight trace inequalities for positive dyadic operators in the upper triangle case” 1st East Asian Conference in Harmonic analysis and Applications, Seoul (2013), Korea.

Tanaka H.: “A characterization for the boundedness of positive operators in a filtered measure space” Harmonic Analysis and its Applications at Tokyo 2012.

Tanaka H.: “Morrey spaces and weights” Harmonic Analysis and its Applications at Nara 2011.

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

田中 仁 (TANAKA, Hitoshi)

東京大学・数理科学研究科・特任助教

研究者番号：70422392