

平成 27 年 6 月 15 日現在

機関番号：13601

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2011～2014

課題番号：23540193

研究課題名(和文)可換バナッハ環の構造と等距離写像の研究

研究課題名(英文)Studies on structures and isometries of commutative Banach algebras

研究代表者

高木 啓行 (TAKAGI, Hiroyuki)

信州大学・学術研究院理学系・教授

研究者番号：20206725

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,400,000円

研究成果の概要(和文)：バナッハ環の保存問題の延長として、2つの連続関数空間の間の等距離写像(線形でなくてもよい)の特徴づけ問題を考えた。ここで、連続関数空間とは、連続関数からなる線形空間(連続関数全体でなくてもよい)に、上限ノルムを与えたものである。実際、2つの連続関数空間AとBがある自然な分離条件を満たすとき、AからBの上への任意の等距離写像が、Bのショケ境界において、荷重合成作用素とその複素共役の組合せで表されることを証明した。

研究成果の概要(英文)：Inspired by the preserver problem of Banach algebras, we consider the characterization of (not necessarily linear) isometries between continuous function spaces. Here a continuous function space means a linear space consisting of (not necessarily all) continuous functions with the supremum norm. We prove that if continuous function spaces A and B satisfy a certain separation property, then every isometry from A onto B is represented by using a weighted composition operator and its complex conjugate on the Choquet boundary of B.

研究分野：数学(基礎解析学)

キーワード：関数解析学 バナッハ環 保存問題 合成作用素

## 1. 研究開始当初の背景

本研究の計画にあたっては、次の「バナッハ環の保存問題」が動機づけになった。

【バナッハ環の保存問題】2つのバナッハ環の間の写像が、ある構造を保存するとき、それは、他のどんな構造を同時に保存するか？

この問題は数学的にまったく自然なもので、その範疇に入る研究は古くから多岐にわたって存在した。しかし、系統だった研究はなく、単発的な研究が散見されただけであった。そのような中、2002年のL. Molnarの研究(引用文献)が契機となって、バナッハ環関係の研究者の間で上の問題が意識されるようになり、この方面の研究が大きく進展した(引用文献)。それらの研究では、バナッハ環の代数構造と幾何構造の親和性を述べた結果が注目に値する。そこで、本研究では、幾何構造を保存する「等距離写像」に焦点をあて、それが代数構造を保存するかどうかを調べることにした。

さて、等距離写像で線形なものは「等長作用素」と呼ばれる。等長作用素はかなり研究されていて、多くの関数空間において、全射の等長作用素が荷重合成作用素として表されることがわかっている(引用文献)。こうして、本研究は、等長作用素や(荷重)合成作用素の研究からも影響を受けている。

## 2. 研究の目的

前節の背景を踏まえ、本研究で取り組む問題を次のように具体化した。

【問題】バナッハ環や関数空間において、等距離写像(距離を保存する写像で、線形性は仮定しない)は、荷重合成作用素を用いて表現できるか？

ここで、荷重合成作用素が登場した理由は、それがいろいろな構造(和・スカラー積・荷重積・分離性などの代数構造)を保存するからである。だから、この問題を考えることは、保存問題を考えていることになるのである。

また、問題に出てくる「バナッハ環や関数空間」については、具体例を一つひとつ取り上げるのではなく、できるだけ一般的な設定で扱うことにした。そうすることで、保存問題を解決する一般論が構築されることをねらった。

このように、本研究の目的は上の問題を解決することであり、それによって保存問題の研究が進展することを期待した。

一方、前節で述べたように、本研究は、等長作用素や(荷重)合成作用素など、関数空間上の作用素論の種々の話題と関連がある。だから、研究の副産物として、具体的な作用素に関する新しい結果が得られることも想定した。

## 3. 研究の方法

(1) バナッハ環や関数空間を一般的に扱う概念に、「関数環」がある。関数環においては、最近保存問題がかなり研究されていて、本研究の設定としては若干の物足りなさがある。そこで、さらに広く「連続関数空間」を取り上げることにした。ここで、「連続関数空間」とは、局所コンパクト Hausdorff 空間上の無限遠点で0になる連続関数(全体とは限らない)からなる線形空間で、上限ノルムを付与したものである(そのうち、乗法に関して閉じたものが、関数環である)。一般のバナッハ空間は、ある連続関数空間とノルム空間として同型になるから、連続関数空間を取り上げることは十分に広い設定だといえる。

さて、関数環における保存問題の研究では「峯関数」が重要な役割を担う。一方、連続関数空間では峯関数が十分に存在するとは限らず、関数環の場合の議論をそのまま連続関数空間の場合に拡張することはできない。そこで、峯関数に代わる道具として「端点」という概念に注目した。端点は、峯関数や Choquet 境界と関連が深く、等長作用素の研究でも重要な役割を果たしている。そこで、この端点をうまく利用して、われわれの問題を考察することにした。

次に、等距離写像の扱いについては、Mazur-Ulam の定理を利用して、実線形等距離写像の考察に帰着させる方法をとった。その際、実線形等距離写像についての A. J. Ellis や三浦毅氏(連携研究者)らの先行研究が、本研究の方向づけに役立った。

(2) 本研究の内容は純粋数学の部類だから、研究方法は、研究代表者の総括のもとでの関係者との情報交換・研究打ち合わせが主となる。

羽鳥理氏(研究分担者)・三浦毅氏(連携研究者)とは、バナッハ環の保存問題について共同研究をした実績があり、それを続けて本研究の土台にすることができた。

植木誠一郎氏(連携研究者)には、解析関数空間の合成作用素に関する知見を提供願った。

高橋眞映氏(山形大・名誉教授)や古清水大直氏(米子高専)からも貴重な情報を得、本研究を進展させることができた。

## 4. 研究成果

(1) 第一の結果として、2つの連続関数空間 A と B が、ある種の自然な分離条件を満たすとき、A から B の上への等距離写像(実線形等距離写像)が、B の Choquet 境界において、荷重合成作用素  $f \circ u(f \circ \cdot)$  とその複素共役の組合せで表されることを証明した。この結果は、関連のある多くの先行結果を含んでいるうえ、応用範囲もかなり広い。そう

いう意味で、当初の目的は達成できたといえる。

(2) (1)の結果は一般論ゆえ、荷重合成作用素のシンボル $u$ と  $\mathcal{C}(X)$ については、連続性以上の情報が述べられていない。しかし、この結果を具体的な関数空間にあてはめた場合に、 $u$ と  $\mathcal{C}(X)$ の詳細が記述できることがわかった。例として、超球環(ディスク環を含む)や有界正則関数環の上の全射の等距離写像を、必要十分の形で決定した。

(3) (1)の結果の連続関数空間  $A$  と  $B$  については「強分離性」を仮定したが、このことは一般性を失っていない。一方、 $A$ については、「3点分離」という追加の分離条件も仮定した。この条件は、重要な連続関数空間ではたいてい満たされるので、応用上は気になくなくてもよい。とはいえ、定理としての完全性を求めると、本当に必要な仮定かどうかを調べるべきである。実際、J. Araujo and J. J. Font による等長作用素に関する同様の結果(引用文献)では、 $A$ に3点分離の条件が課されていない。それで、3点分離の条件を吟味した結果、その条件を、共役空間の単位球の端点に関する条件に緩めることができた。そして、応用範囲を真に広げることができた。

一方で、 $A$ に強分離性を仮定しただけでは同じ結果が得られないことも判明した。具体的には、一次関数全体のような関数の少ない連続関数空間で、荷重合成作用素とその複素共役の組合せで表せない等距離写像が存在したのである。この例外現象は、当初の計画からは想定外であり、その追求はまた別の研究課題に譲りたいと思っている。

以上、(1)~(3)の結果は、下記の発表論文にまとめた。

(4) 等距離写像の特別なものに、シフト作用素がある。(1)~(3)の研究を進める中で、シフト作用素に関する結果も得られた。まず、コンパクト Hausdorff 空間上の無限次元の関数環において、後退シフト作用素が存在しないことを証明した。M. Rajagopalan and K. Sundaresan の論文(引用文献)では、連続関数全体の環  $\mathcal{C}(X)$ において同様のことが証明されたが、われわれの結果はそれを大きく拡張している。また、双対の関係にある前進シフト作用素が、 $\mathcal{C}(X)$ と異なるある関数環においては存在しうるので、われわれの結果は興味深いものとなった。さらに、後退シフト作用素の条件を緩めた場合や、定義域のコンパクト性を局所コンパクト性に拡張した場合も考察した。これらの内容は発表論文にまとめた。

さらに、数列空間の直積空間上の等長作用素やシフト作用素についても新しい発見があり、口頭発表した(学会発表)。

(5) バナッハ環の保存問題という立場では、羽鳥理氏(研究分担者)を中心にして研究が進んだ。特に、非可換バナッハ環において、ユタリー群上の等距離写像がもたらす保存構造が明らかになり(発表論文)。(1)~(3)の研究結果への影響が大きかった。

(6) 発表論文では、関数環を単位的半単純可換バナッハ環に一般化して、等距離写像の代わりにスペクトル半径保存写像の形を考えた。これも本研究の成果のひとつである。

(7) この研究は、関数空間上の作用素論と深く関わっているので、その方面の結果も副産物として得られた。

ひとつは、作用素の Hyers-Ulam の安定性問題に関するものである。この問題については、以前から、高橋眞映氏(山形大)を中心に、共同研究を行っていた。今回、本研究の影響を受けて、交代準同型写像の Hyers-Ulam の安定性を証明することができた(発表論文)。

また、スラント Toeplitz 作用素のスペクトルの性質についても、新しい発見があり、近々まとめる予定にしている。

#### <引用文献>

J. Araujo and J. J. Font, Linear isometries between subspaces of continuous functions, Trans. Amer. Math. Soc. 349 (1997), 413-428.

R. J. Fleming and J. E. Jamison, "Isometries on Banach Spaces" Chapman & Hall/CRC. Vol.1 2003, Vol.2 2008.

L. Molnar, Some characterizations of the automorphisms of  $B(H)$  and  $C(X)$ , Proc. Amer. Math. Soc. 130 (2002), 111-120.

L. Molnar, "Selected Preserver Problems on Algebraic Structures of Linear Operators and on Function Spaces" Springer, 2007.

M. Rajagopalan and K. Sundaresan, Backward shifts on Banach spaces  $C(X)$ , J. Math. Anal. Appl. 202 (1996), 485-491.

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計8件)

Sin-Ei Takahasi, Makoto Tsukada, Takeshi Miura, Hiroyuki Takagi and Kotaro Tanahashi, Ulam type stability problems for alternative homomorphisms, J. Inequal. Appl. 2014, 13pp, 査読有.  
DOI : 10.1186/1029-242X-2014-228

Osamu Hatori, Isometries of the unitary

groups in  $C^*$ -algebras, *Studia Math.* 221 (2014), 61-86, 査読有.  
DOI : 10.4064/sm221-1-4

Hironao Koshimizu, Takeshi Miura, Hiroyuki Takagi and Sin-Ei Takahasi, Real-linear isometries between subspaces of continuous functions, *J. Math. Anal. Appl.* 413 (2014), 229-241, 査読有.  
DOI : 10.1016/j.jmaa.2013.11.050

Osamu Hatori and Lajos Molnar, Isometries of the unitary groups and Thompson isometries of the spaces of invertible positive elements in  $C^*$ -algebras, *J. Math. Anal. Appl.* 409 (2014), 158-167, 査読有.  
DOI : 1016/j.jmaa.2013.06.065

Osamu Hatori and Kei-Ichi Watanabe, Isometries between groups of invertible elements in  $C^*$ -algebras, *Studia Math.* 209 (2012), 103-106, 査読有.  
DOI : 10.4064/sm209-2-1

Osamu Hatori and Lajos Molnar, Isometries of the unitary groups, *Proc. Amer. Math. Soc.* 140 (2012), 2127-2140, 査読有.  
DOI : <http://dx.doi.org/10.1090/S0002-9939-2011-11216-4>

Go Hirasawa, Takeshi Miura and Hiroyuki Takagi, Spectral radii condition for isomorphisms between unital semisimple commutative Banach algebras, *Contemp. Math.* 547 (2011), 125-134, 査読有.  
DOI : <http://dx.doi.org/10.1090/conm/547>

Hiroyuki Takagi, Hironao Koshimizu and Hiroaki Ariizumi, Backward shifts on function algebras, *J. Math. Anal. Appl.* 377 (2011), 135-144, 査読有.  
DOI : 10.1016/j.jmaa.2010.10.012

#### [学会発表](計8件)

高木啓行, 古清水大直, 直積空間上のソフト作用素, 山陰基礎論・解析学研究集会, 2015.1.24, 米子市国際ファミリープラザ(鳥取県米子市).

古清水大直, 高木啓行, 保存問題における関数空間上の等距離写像について, 山陰基礎論・解析学セミナー, 2014.2.1, 米子高専.

羽鳥理,  $\exp A$  上の preserver problem について, 関数環研究集会, 2013.12.11, クロスパルにいがた(新潟県新潟市).

高木啓行, 古清水大直, 直積空間と等長作用素, つくばセミナー, 2013.3.12, 筑波大.

Osamu Hatori, Isometries on the unitary groups, Conference on Mathematics and Statistics, 2012.5.16, Univ. of Memphis, USA.

Sin-Ei Takahasi, Takeshi Miura, Hiroyuki Takagi and Kotaro Tanahashi, Ulam type stability problems for alternative homomorphisms, 第20回関数空間セミナー, 2011.12.24, 北大理.

Osamu Hatori, Criteria for the equivalence of LCA groups, Workshop on commutative Banach algebras 2011, 2011.11.4, 奈良教育大.

Hironao Koshimizu, Takeshi Miura, Hiroyuki Takagi and Sin-Ei Takahasi, Real-linear isometries between subspaces of continuous functions, Research on preserver problems concerning to Banach algebras and its applications, 2011.11.1, 京大・数理研.

#### 6. 研究組織

##### (1) 研究代表者

高木 啓行 (TAKAGI, Hiroyuki)  
信州大学・学術研究院理学系・教授  
研究者番号 : 2 0 2 0 6 7 2 5

##### (2) 研究分担者

羽鳥 理 (HATORI, Osamu)  
新潟大学・自然科学系・教授  
研究者番号 : 7 0 1 5 6 3 6 3

##### (3) 連携研究者

三浦 毅 (MIURA, Takeshi)  
新潟大学・自然科学系・教授  
研究者番号 : 9 0 3 3 3 9 8 9

植木 誠一郎 (UEKI, Sei-Ichiro)  
茨城大学・工学部・准教授  
研究者番号 : 7 0 5 1 2 4 0 8