

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 21 日現在

機関番号：13601

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2011～2015

課題番号：23540194

研究課題名(和文) 流体力学の基礎方程式の解の一意性と正則性についての研究

研究課題名(英文) Uniqueness and regularity of solutions to equations in fluid dynamics

研究代表者

谷内 靖 (TANIUCHI, Yasushi)

信州大学・学術研究院理学系・教授

研究者番号：80332675

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円

研究成果の概要(和文)：3次元非有界領域上のNavier-Stokes方程式に対し、定常解や時間周期解のように、時間軸全体で方程式を満たし弱 $L_3$ 上で有界な解の性質を研究した。これまで、そのような解の一意性に関し、小さな解は小さな解のクラスで一意性であることはわかっていたが、小ささを仮定しない解のクラスで一意かどうか判っていなかった。本研究では、二つの解が存在したとし、一方が弱 $L_3$ 空間上でprecompactな値域を持ち、もう一方が小さければ、両者は一致することを示した。この結果は、既知の定常解や時間周期解の同様な一意性定理を改良したものとなっている。

研究成果の概要(英文)：We proved the uniqueness of bounded continuous  $L_{3,weak}$ -solutions on the whole time axis to the Navier-Stokes equations in 3-dimensional unbounded domains. Here,  $L_{3,weak}$  denotes the weak  $L_3$  space. Thus far, uniqueness of such solutions to the Navier-Stokes equations in unbounded domain, roughly speaking, is known only for a small solution in  $BC(R; L_{3,weak})$  within the class of solutions which have sufficiently small  $BC(R; L_{3,weak})$ -norm. In this study, we established another type of uniqueness theorem for solutions in  $BC(R; L_{3,weak})$  using a smallness condition for one solution and a precompact range condition for the other one.

研究分野：数学

キーワード：関数方程式論 流体力学

## 1. 研究開始当初の背景

水や油などの粘り気のある縮まない流体（非圧縮粘性流体）の運動を記述する Navier-Stokes 方程式に関して多くの未解決問題が残されている。この方程式は非圧縮粘性流体の速度場  $u$  および圧力場  $p$  を未知関数とする連立の非線形偏微分方程式である。特に、考える領域の次元が  $3$  以上の場合、滑らかな解の時間大域可解性問題は未解決であり、この問題は数学の  $7$  つの未解決問題（ミレニアム問題）の一つに選ばれている。このことから Navier-Stokes 方程式が物理学、工学のみならず数学分野においても極めて重要視されている方程式であることがわかる。この方程式に関して上記の問題以外にも多くの未解決問題が残されている。例えば定常解や時間周期解のように時間軸全体で方程式を満たす解の一意性問題も適切な条件のもとでしか解決されていない。有界領域上の Navier-Stokes 方程式に対しては、そのような時間軸全体上の古典解で、ある意味で小さな解は与えられたデータに対し一つだけであることが判っている。しかし、外部領域のような非有界領域上の解に関しては、そのような一意性が判っていない。非有界領域上では、時間軸全体で方程式を満たす小さな解が、小さな解のクラスで一意であることは判っているが、小ささを仮定しない解のクラスでの一意性は判っていない。

## 2. 研究の目的

本研究では、空間次元が  $3$  以上の場合の非圧縮 Navier-Stokes 方程式に対する解の性質を考察する。具体的には、定常解や時間周期解のような時間軸全域で方程式を満たす解の一意性などを調べる。特に全空間、半空間、外部領域、aperture domain, perturbed half-space などの非有界領域上での Navier-Stokes 方程式の解の性質を調べる。

## 3. 研究の方法

関数解析的手法及び実解析学的手法を用いて行う。3次元外部領域の Navier-Stokes 方程式に対し、時間軸全体で方程式を持たず解は、一般にはルベグ  $L_p$  空間で取り扱うことが困難であるため、弱  $L_p$  空間を用いる。また、微分方程式は積分方程式の研究に帰着されるが、その解の性質を調べるためには Stokes 半群に関する有名な  $L_p$ - $L_q$  評価を用いる。解の一意性に対し、有界領域上の解に対してはエネルギー法が威力を発揮するが、外部領域などの非有界領域上の Navier-Stokes 方程式の解はエネルギークラスに属さないため、エネルギー法が使えない。このことが、非有界領域における解の一意性の証明を難しくしている。そこで、本研究では積分方程式を用いて一意性

を証明するが、初期値問題と違い積分方程式が無限区間上での積分を含んでしまっており、初期値問題での一意性の証明方法のように積分区間を短くしてある種の小ささを導くという方法が使えない。そこで、本研究では方程式のある種の Dual 方程式を考え、その Dual 方程式の解を用いて、エネルギー法と積分方程式による方法の利点を組み合わせることにより、一意性を導く。

## 4. 研究成果

三次元非有界領域上での Navier-Stokes 方程式の時間周期解の一意性に関して、次が知られている。二つの解が弱  $L_3$  空間上に存在したとし、両方が適当な正則性 ( $L_{\{6,2\}}$  に属する) をもち、一方の解が小さければ、両者は一致することがわかっている。本研究では、時間周期性を仮定せずとも、同様の一意性が言えることを示した。まずはじめに、全空間、半空間、外部領域、aperture domain, perturbed half-space などの非有界領域上の3次元 Navier-Stokes 方程式に関する、時間周期解の一般化である時間概周期解や、そのような解に漸近する解 (Backward asymptotically almost periodic-in-time solution) を研究し、そのような解に対しても、同様の一意性が言えることを示した。さらに、この研究を推し進め、もっと一般の解も考察し、次を示した。二つの解が適当な関数空間に存在するとし、一方の解が小さく、もう一方の解が precompact 値域条件を満たせば(すなわち、解  $u(t)$  の値域が弱  $L_3$  空間において Precompact であれば)、両方の解は一致することを示した。定常解、時間周期解、時間概周期解は Precompact 値域条件を満たすことから、この結果は既知の結果の改良になっている。また、一意性のために仮定されていたある種の正則性条件も大幅に緩めることに成功した。具体的に述べると、既に証明されている時間周期解に対する同種の一意性定理においては、解が弱  $L_3$  空間のみならずローレンツ空間  $L_{\{6,2\}}$  にも属することが仮定されていたが、そのような仮定を大幅に緩め、解が弱  $L_3$  と  $L_{\{6,2\}}$  の共通部分の弱  $L_3$  空間における閉包に属してさえいれば、上記のような一意性が証明できることを示した。また、次元が4次元以上の外部領域や3次元以上の場合の全空間や半空間等の非有界領域において、外力が適当な意味で Precompact 値域条件を満たし、十分小さければ、precompact 値域条件をみたす解が存在することも証明した。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計4件)

1. R.Farwig T.Nakatsuka, Y.Taniuchi,  
"Uniqueness of solutions on the whole time  
axis to the Navier-Stokes equations in  
unbounded domains"  
Commun. P.D.E. 40 (2015) 1884-1904  
( 査読有り )

2. R.Farwig, T.Nakatsuka,Y.Taniuchi ,  
"Existence of solutions on the whole time  
axis to the Navier-Stokes equations with  
precompact range in  $L^3$  "  
Arch. der Math. 104 (2015) 539-550  
( 査読有り )

3. R. Farwig,Y.Taniuchi, " Uniqueness of  
backward asymptotically almost  
periodic-in-time solutions to  
Navier-Stokes equations in unbounded  
domains " .  
Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S 6 (2013)  
1215-1224  
( 査読有り )

4. R.Farwig, Y.Taniuchi " Uniqueness of  
almost periodic-in-time solutions to  
Navier-Stokes equations in  
unbounded domains " J. Evolution Equations  
11 (2011) 485-508  
( 査読有り )

[ 学会発表 ] ( 計 12 件 )

1. Y.Taniuchi " Brezis-Gallouet-Wainger  
type inequalities and blow-up criteria  
for Navier-Stokes equations in bounded  
domains " 非圧縮性流体の数理解析 京都大  
学数理解析研究所 2015 年 11 月 17 日

2. Y.Taniuchi " Uniqueness of solutions on  
the whole time axis to the Navier-Stokes  
equations in  
unbounded domains "  
The 10th AIMS Conference on Dynamical  
Systems  
Differential Equations and Applications  
Universidad Autonoma de Madrid, Spain  
2014 年 7 月 10 日

3. Y.Taniuchi " Uniqueness of solutions on  
the whole time axis to the Navier-Stokes  
equations in unbounded domains "  
VORTICITY, ROTATION AND SYMMETRY (III) -  
APPROACHING LIMITING CASES OF FLUID FLOW  
Centre International de Rencontres  
Mathematiques (CIRM) in Luminy (Marseille,  
France) 2014 年 5 月 6 日

4. Y.Taniuchi " Uniqueness of solutions  
bounded on the whole time axis to the  
Navier-Stokes equations in unbounded

domains " 流体と気体の数学解析  
京都大学数理解析研究所 2013 年 7 月 11 日

5. Y.Taniuchi " Uniqueness of mild  
solutions to Navier-Stokes equations in  
unbounded domains " The 8th  
Japanese-German International Workshop on  
Mathematical Fluid Dynamics, 早稲田大学  
2013 年 6 月 17 日-20 日

6. Y.Taniuchi " Uniqueness of backward  
asymptotically almost periodic-in-time  
solutions to Navier-Stokes equations in  
unbounded domains " International  
Conference on the Mathematical Fluid  
Dynamics on the occasion of Professor  
Yoshihiro Shibata's 60th birthday 2013 年  
3 月 5 日

7. Y.Taniuchi " Uniqueness of backward  
asymptotically almost periodic-in-time  
solutions to Navier-Stokes equations in  
unbounded domains " International Workshop  
on PDE  
" Nonlinear Dispersive Equations and  
Fluid Mechanics "  
-Well-posedness and Smoothing Effect-  
東北大学 2012 年 12 月 14 日

8. Y.Taniuchi, " Almost periodic-in-time  
solutions to the Navier-Stokes equations  
in unbounded domains " 研究集会「第 4 回若  
手による流体セミナー」2012 年 10 月 1 日 富  
山大学

9. Y.Taniuchi "Backward asymptotically  
almost periodic-in-time solutions to  
Navier-Stokes equations in unbounded  
domains" 非線形偏微分方程式研究集会、  
2012 年 3 月 17 日, 福岡ガーデンパレス

10. Y.Taniuchi "Backward asymptotically  
almost periodic-in-time solutions to  
Navier-Stokes equations in unbounded  
domains" 若手による流体力学の基礎方程式  
研究集会、2012 年 1 月 5 日, 名古屋大学大  
学院多元数理科学研究科

11. Y.Taniuchi, " Uniqueness of almost  
periodic-in-time solution to Navier-Stokes  
equations in unbounded domains " The 4th  
MSJ-SI  
Nonlinear dynamics in partial differential  
equations 九大医学部百年記念講堂 2011 年  
9 月 19 日発表

12. Y.Taniuchi, " Uniqueness of almost  
periodic-in-time solution to Navier-Stokes  
equations in unbounded domains "  
VORTICITY, ROTATION AND

SYMMETRY (II) - REGULARITY OF  
FLUID MOTION

Centre International de Rencontres  
Mathematiques (CIRM) in Luminy  
(Marseille, France) 2011 年 5 月 23 日

〔その他〕

国際研究集会開催

“ The Navier-Stokes Equations and related  
Topics ” 2016 年 3 月 7 日から 3 月 11 日  
名古屋大学多元数理研究科

6 . 研究組織

(1) 研究代表者

谷内 靖 ( TANIUCHI, Yasushi ) ( 信州  
大学・学術研究院理学系・教授 )

研究者番号 : 80332675

(2) 研究分担者

( )

研究者番号 :

(3) 連携研究者

( )

研究者番号 :