

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 24 日現在

機関番号：13601

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2011～2013

課題番号：23540195

研究課題名(和文) 振動型積分作用素理論とその場の Feynman 経路積分への応用

研究課題名(英文) On the theory of the oscillatory integral operators and its applications to the Feynman path integral for the field theory

研究代表者

一ノ瀬 弥 (ICHINOSE, Wataru)

信州大学・理学部・教授

研究者番号：80144690

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,900,000 円、(間接経費) 1,170,000 円

研究成果の概要(和文)： 相対論に従う量子力学的粒子は、Dirac方程式で記述される。この方程式の解のFeynman経路積分表示に成功した。数学的には、Dirac方程式を含むより一般の方程式の解に対して Feynman経路積分表示を与えた。

我々のFeynman経路積分は超経路原理を満たしている。又Feynmanが述べたように、考える電子の経路は、あらゆる方向にあらゆる速度で進み、未来だけでなく過去方向にも進むものを考える。過去方向に進む電子は、未来方向に進む陽電子と解釈される。Dirac方程式に対するFeynman経路積分について、簡単な解の経路積分表示を与えることは不可能であると、60年以上考えられていた。

研究成果の概要(英文)： The applicant succeeded in giving the expression of the Feynman path integral for the solutions of the Dirac equations, which describe the quantum particles in the relativistic theory. In more general, the expression of the Feynman path integral was given for the solutions of more general equations including the Dirac ones.

This expression is given in the form of the "sum" of the probability amplitude satisfying the superposition principle over all possible paths that go in any direction at any speed forward and backward in time.

The electrons that go backward in time are interpreted as positrons that go forward in time. This expression enables us to understand the relativistic quantum mechanics intuitively and to expect that we can construct the relativistic quantum electrodynamics in terms of a more direct method than the perturbative one used mainly in the present. The Feynman path integral for the Dirac equations has not been given for 60 years or more.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：Feynman 経路積分 Dirac 方程式 量子電磁気学 量子力学 Schrodinger 方程式

## 1. 研究開始当初の背景

量子電磁気学とは、量子化された荷電粒子と光子(量子化された電磁場)との相互作用を記述し、荷電粒子と光子の両方の運動を記述するものである。相対論的量子電磁気学は、荷電粒子を Dirac 方程式により第 2 量子化し、電子と陽電子の対生成・対消滅も説明するものであり、これが本来の量子電磁気学である。荷電粒子を量子化した場合は、フェルミオン場となる。非相対論的量子電磁気学は、荷電粒子は Schrodinger による第 1 量子化のままであり、陽電子も現れず、数学的に取り扱い易いものである。物理的には、toy モデルと呼ばれている。

1948 年 Feynman は、Schrodinger 方程式による量子力学の定式化と全く異なる、経路積分による新しい量子力学の定式化の方法を提唱した。この量子力学の定式化の方法は、相対論的量子電磁気学に用いられ(1949,1950)、この研究で Feynman は、朝永及び Schwinger と共にノーベル賞を受賞した。Feynman、朝永、Schwinger の理論は同等であることが示されたが(Dyson 1949)、Feynman の方法は取扱いが簡単のため、この方法が現在場の量子論で広く用いられている。

一方、経路積分の数学的取り扱いの困難さは長い間、多くの数学者、物理学者から指摘されてきた。例えば、現代数学の広がり I (京都大学・深谷賢治教授、岩波現代数学の基礎 1996)。

場の量子論の経路積分の主な数学的研究として、以下のものがある。

- (1) Nelson (Princeton 大学 1964) は、荷電粒子が scalar 場と相互作用する非相対論場の虚時間経路積分の研究を、Markoff 過程を用いて行った。量子電磁気学では、荷電粒子は scalar 場ではなく、vector 場と相互

作用する。

- (2) Simon (Princeton 大学 1974), Glimm (New York 大学) - Jaffe (Harvard 大学) (1981) は、自由な(電磁場がない)相対論的ボゾン場の虚時間経路積分の研究を、Gauss 過程を用いて行った。
- (3) Albeverio (Bonn 大学) - Hoegh-Krohn (Oslo 大学) (1977, 2008) は自由な相対論的ボゾン場の Feynman 経路積分の研究を Hilbert 空間上の Fresnel 積分を用いて研究した。
- (4) 廣島(九州大学 1997) は、ただ 1 個の電子が電磁場と相互作用する非相対論的量子電磁気学を考え、これの虚時間経路積分を考察した。
- (5) 申請者は、任意個の電子が電磁場と相互作用する非相対論的量子電磁気学における Feynman 経路積分の数学的定義を与えた(2010)。

経路についての作用を  $S$  とする。Feynman 経路積分とは、本来、同等な重みをつけて  $\exp iS$  を経路について積分するものである。これは、superposition principle (超経路原理) と呼ばれ、量子力学の直感的理解のための本質的な要請である。この意味では、Albeverio - Hoegh-Krohn の論文と申請者の論文のみが、本来の Feynman 経路積分にあたる。

## 2. 研究の目的

- (1) 相対論的量子電磁気学を定める Feynman 経路積分の研究。 荷電粒子を、Dirac 方程式を用いて第 2 量子化し、相対論的量子電磁気学の Feynman 経路積分の数学的定義を与える。摂動論的場の量子論は、繰り込み理論が非常に複雑である。こ

の研究は、摂動論を用いない直接的な場の量子論を展開するのが目的である。

(2) Feynman 経路積分の定める相対論的量子電磁気学から、摂動論を用いた相対論的量子電磁気学を導く研究。

(1) の Feynman 経路積分が定める相対論的量子電磁気学から、現在用いられている、摂動論を用いた相対論的量子電磁気学を導くのが目的である。摂動論的場の量子論は、繰り込み理論が非常に複雑であるため、この研究は重要である。

## 2. 研究の方法

擬微分作用素などの振動型積分作用素の実解析的研究を行い、これを用いて Dirac 方程式の第 2 量子化の Feynman 経路積分の研究を行う。

この研究課題達成を以下の方法で行う。

- (1) 京都大学大学院人間・環境学研究科、大阪大学大学院理学研究科等の国内の大学研究者、及びイタリア Torino 大学、カナダ York 大学等の国外の大学研究者から、振動型積分作用素に関する知識・技術の協力を得て行う。
- (2) 金沢大学大学院自然科学研究科、工学院大学等の国内の大学研究者、及びドイツ Bonn 大学、イタリア Trento 大学等の国外の大学研究者から、Feynman 経路積分に関する知識・技術の協力を得て行う。
- (3) 京都大学大学院理学研究科、立命館大学等の国内の大学研究者から、Dirac 方程式に関する知識・技術の協力を得て行う。
- (4) 九州大学大学院数理学府、北海道大学大学院理学研究科等の国内の大学研究者から、摂動論に依らない場

の理論に関する知識・技術の協力を得て行う。

## 3. 研究成果

スピン 2 分の 1 をもつ相対論に従う量子力学的粒子を記述する、Dirac 方程式に対する Feynman 経路積分の構成に成功した。数学的には、Dirac 方程式を含むより一般の方程式に対して Feynman 経路積分表示を与えた。

我々が構成した Feynman 経路積分では、Feynman 自身が述べているように、考える電子の経路は、あらゆる方向に、あらゆる速度で進み、それは未来だけでなく過去方向にも進むものを考える。過去方向に進む電子は、陽電子が未来方向に進むと解釈されている。

Dirac 方程式に対する Feynman 経路積分は、Feynman 自身が彼の著書 Quantum Mechanics and Path Integrals (1965) で何回も述べているように (例えばページ 38)、簡単な経路積分表示を与えることは不可能であると、60 年以上の長い間考えられていた。

Feynman は、Dirac 方程式に対する Feynman 経路積分が得られなかったため、自由 Dirac 方程式の解の表示を用いて、摂動論による相対論的量子電磁気学を展開した。申請者は、この一般的な Dirac 方程式に対する Feynman 経路積分を用いて、本来の研究目的である、摂動論に依らない相対論的量子電磁気学の建設の研究を引き続き行う予定である。

尚、Dirac 方程式に対する Feynman 経路積分の研究に関連して、Dirac 方程式と Schroedinger 方程式の解のパラメーターに関する連続性と微分可能性に関する研究成果も得られた。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者に

〔雑誌論文〕(計 7 件)

1. W. Ichinose, 査読有、On the Feynman path integral for the Dirac equation in the general dimensional spacetime, Commun. Math. Phys. Vol. 329,2(2014),483-508.DOI:10.1007/s00220-014-1997-x
2. W. Ichinose and K. Iwashita, 査読有、On the uniqueness of the polar decomposition of bounded operators in Hilbert spaces, Journal of Operator Theory, 70:1(2013), 101-106.DOI:107900/jot.2011may16.1911
3. F.Hiroshima and I.Sasaki, 査読有、Multiplicity of the lowest eigenvalue of non-commutative harmonic oscillators, Kyusyu Journal of Math. 67(2013),355-366.DOI:org/102206/Kyusyujm.67.355
4. W. Ichinose, 査読有、The continuity and the differentiability of solutions on parameters to the Schrodinger equations and the Dirac equations, Journal of Pseudo-Differential Operators and Applications: Volume 3, 4 (2012), 399-419.DOI:10.1007/s11868-012-0056-7.
5. F. Hiroshima and I. Sasaki, T. Shirai and A. Suzuki, 査読有、Note on the spectrum of discrete Schroedinger operators, Journal of Math-for-Industry, 47 (2012B-4), 105-108.DOI:org/10.1016/j/jmaa.2014.01.005
6. W. Ichinose, 査読有、The continuity of solutions with respect to a parameter to symmetric hyperbolic systems, In: L. Rodino et al., ed. Pseudo-Differential Operators; Analysis and computations = Operator Theory, 213(2011), 219-234, Springer Basel AG.DOI:10.1007/978-3-0348-0048-5\_13
7. Y. Otake and I. Sasaki, 査読有、Measure theoretical approach to recurrent properties for quantum dynamics, Journal of Phys A: Mathematical and Theoretical,44(2011),465209(1)-465209(10).DOI:10.1088/1751-8113/44/46/46

〔学会発表〕(計 17 件)

1. W. Ichinose, ヒルベルト空間上の有界作用素の極分解の一意性について, 日本数学会関数解析分科会、2014年3月18日、学習院大学(岩下加奈子氏との共同発表)。
2. W. Ichinose, Dirac 方程式に対する Feynman 経路積分の構成について, 日本数学会関数方程式分科会、2014年3月15日、学習院大学。
3. W. Ichinose, Schrodinger 方程式と Dirac 方程式の解の、パラメーターに関する連続性と微分可能性, 日本数学会関数方程式分科会、2014年3月15日、学習院大学。
4. W. Ichinose, On the Feynman path integral for the Dirac equation, 作用素論セミナー、2013年11月28日、京都大学数理解析研究所。
5. W. Ichinose, On the Feynman path integral for the Dirac equation in the general dimensional space time, QMATH12 Mathematical Results in Quantum Mechanics, September 10 - 13, 2013, Humboldt University of Berlin (Germany).
6. I. Sasaki, 準相対論的 Pauli-Fierz モデルの束縛条件について, 数理物理セミナー、北海道大学理学研究科、2013年6月28日。
7. I. Sasaki, Multiplicity of Ground State of Non-Commutative Harmonic Oscillators, International Conference on Mathematical Sciences and Statics, Sunway Prutra Hotel, Kuala Lumpur, 2013年2月5日。
8. W. Ichinose, On the Feynman path integral for nonrelativistic quantum electrodyanmics with spin, Joint Mathematical Meeting of AMS and MAA, January 9 - 12, 2013, San Diego (United States of America).
9. W. Ichinose, On the Feynman path integral for the Dirac equation in the general dimensional spacetime. 夏の作用素論セミナー(新潟大学), 2012年9月9日。
10. I. Sasaki, Enhanced binding for the relativistic many body Nelson model, Spectral Theory and Differential Equations, ハリコフ、ウクライナ、2012年8月24日。
11. W. Ichinose, On the Feynman path integral for nonrelativistic quantum electrodyanmics with spin, International Congress of Mathmactical Physics, August 6 - 11, 2012, Aalborg,

- Denmark (poster).
12. W. Ichinose, On the Feynman path integral for nonrelativistic quantum electrodyamics with spin, Mathematical Aspects of QFT and QSM, 30th July - 1st August 2012, Hamburg, Germany (poster).
  13. I. Sasaki, Binding energy for a general class of quantum field Hamiltonian, The fourth Internatioanl Conference on Mathematical Sciences ICM2012, Al-Ain(UAE), 2012年3月11日。
  14. W. Ichinose, On the uniqueness of the polar decomposition of bounded operators in Hilbert spaces。夏の作用素論セミナー(熊本市国際交流会館), 2011年9月4日。
  15. I. Sasaki, Enhanced binding of the semi-relativistic Nelson model, Laboratoire de Mathematiques, Univerisite Pari-Sud Orsay (France), 2011年9月1日。
  16. W. Ichinose, 量子電磁気学に関する Feynman 経路積分入門。信州大学数理物理セミナー(信州大学理学部), 2011年5月30日。
  17. W. Ichinose, シュレディンガー方程式とディラック方程式の解の、パラメーターに関する連続性と偏微分可能性について。名古屋大学偏微分方程式セミナー(名古屋大学理学部), 2011年4月18日。

## 6. 研究組織

### (1)研究代表者

一ノ瀬 弥 (ICHINOSE, Wataru)  
信州大学・理学部・教授  
研究者番号: 80144690

### (2)研究分担者

佐々木 格 (SASAKI, Itaru)  
信州大学・理学部・助教  
研究者番号: 50558161

### (3)連携研究者

( )

研究者番号: