

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 18 日現在

機関番号：14403

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2011～2013

課題番号：23540200

研究課題名(和文)作用素不等式と周辺分野への応用

研究課題名(英文)Operator inequalities and their application to related fields

研究代表者

藤井 淳一 (Fujii, Jun Ichi)

大阪教育大学・教育学部・教授

研究者番号：60135770

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,200,000円、(間接経費) 660,000円

研究成果の概要(和文)：作用素不等式関係の論文は、10編出すことができ、発表も8件行ったので、結果的にはまずまずといったところである。内訳としては、補間的パス関連で2編、Jensen 関連で2編、それ以外は関連の不等式の論文である。

しかし、発表はほとんどがこの方向で得られた結果であり、少しずつながらも前進していることは示せた。なお、下記の学会発表の にある補間的平均とKarcher方程式との関連性についての内容は、今回記述に間に合わなかったが、すでに論文としてアクセプトされている。

研究成果の概要(英文)：10 papers for operator inequalities were published in this period. Among those, 2 papers are related to interpolation paths, and 2 to Jensen operator inequalities. Though results for geometrical considerations are not so many, almost all talks in the conferences are related to this.

In particular, my talk at the last March in Gakushuin University is on a discussion between interpolation al means and the Karcher operator equations. My paper for this subject has already been accepted but not been published yet.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：基礎解析学

キーワード：作用素不等式 情報理論 量子情報 基礎解析学

## 1. 研究開始当初の背景

作用素幾何平均の多変数化を巡って、改めて幾何学的な側面が見直されてきている。Corach-Porta-Recht の幾何学的考察に関連して、以前に導入した作用素平均の幾何学的には測地線に関連がある「補間的パス」について、改めてその性質が見直されていた。補間的パスは、微分可能であり、パラメータについて凸であるなど、様々ないい性質を持つことがわかっているが、それらを使った結果は今まで気づかれていなかった。作用素対数平均は、作用素幾何平均の補間的パスを積分して得られる典型的で重要な平均であるが、そのような平均を「積分平均」ととらえることにより、新たな評価式として、作用素不等式が得られることがわかってきた。それをとっかかりとして、今回の研究はスタートした。さらに、Jensen不等式は、もともとの凸性あるいは凹性の拡張として、内分点との関連で論じられるのがふつうであるが、少し違った見方として外分点的な特徴づけもでき、その方面から見直して利用して得られる作用素不等式が多く得られる可能性があるので、今回はこの方面も追及していくつもりであった。もちろん、ほかにもたくさんある作用素不等式と様々な境界領域とのかかわりについては、今後も地道に研究を続けていく予定であった。それらを、多領域の評価に役立てることができるよう形で研究したい。

## 2. 研究の目的

作用素不等式は様々な評価に用いられているが、近年は幾何学的な側面も見直されてきて、境界領域とさらに密接な関係ができてきている。そこで、様々な境界領域を意識しつつ、作用素平均およびそれがつくる「パス」に関連する性質を調べていく。特に最近話題になっている Karcher 方程式から得られる平均などの多変数幾何平均との関連につい

ても調べていきたい。

また Jensen 型の作用素不等式や様々な空間での Schwarz 不等式を中心として、基本的な作用素不等式の新たな方向性を探っていく。

## 3. 研究の方法

境界領域との関連を調べるために、多くの近接多領域についての文献を調査し、一方で最新の論文もチェックしながら、作用素不等式を様々な角度から眺め、有用な性質や評価式としての不等式自身を探っていく。勿論、その過程で、近接領域の国内外の研究者との交流を深め、研究会に積極的に発表し、講演を聞くことで刺激を受けつつ自らの研究の推進力に変えていくつもりである。

## 4. 研究成果

作用素不等式関係の論文は、査読付きのものを 10 編出すことができ、研究発表も 8 件行ったので、結果的にはまずまずといったところである。

内訳としては、補間的パス関連で 2 編出し、  
でその応用としての積分平均の性質、特に上からの評価式について調べ、  
では補間的な path となるための下の平均が持つべき同値な性質を求めた。また、Jensen 関連では 2 編出し、  
では通常内分点との比較でなされている議論を外分点で論じ、  
ではそれに基づいて得られる評価式について詳しく述べている。それ以外の論文は関連の不等式の論文である。特に、  
は基本的な Schwarz 不等式を、幾何平均との関連で、Hilbert 空間を一般化した  $C^*$ -module の中で論じた目新しい結果である。

しかし、発表は  
を除いて幾何学的な性質に関連した形で得られた結果であり、少しずつながらもこの方この研究が前進していることは示せた。なお、下記の学会発表の  
にある補間的平均と Karcher 方程式との関連性

についての内容は、今回記述に間に合わなかったが、すでに論文としてアクセプトされている。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計 10 件)

Fujii, Jun Ichi; Fujii, Masatoshi; Nakamoto, Ritsuo An operator inequality implying the usual and chaotic orders. Ann. Funct. Anal., 5 (2014), 24-29.

Moslehian, Mohammad Sal; Fujii, Jun Ichi, Operator inequalities related to weak 2-positivity. J. Math. Inequal., 7 (2013), 175-182.

Dragomir, Sever S.; Fujii, Jun Ichi; Seo, Yuki, Bounds for an operator concave function. Electron. J. Linear Algebra, 26 (2013), 192-200. 47A63

Fujii, Jun Ichi, Interpolationality for symmetric operator means. Sci. Math. Jpn., 75 (2012), 267-274.

Fujii, Jun Ichi; Fujii, Masatoshi, Upper estimations on integral operator means. Sci. Math. Jpn., 75 (2012), 217-222.

Fujii, Jun Ichi; Fujii, Masatoshi; Matsumoto, Akemi, On 3-variable extension for the integer mean. Sci. Math. Jpn., 75 (2012), 85-94.

Fujii, Jun Ichi; Pecaric, Josip; Seo, Yuki, The Jensen inequality in an external formula. J. Math. Inequal., 6 (2012), 473-480.

Fujii, Jun Ichi; Fujii, Masatoshi.; Moslehian, M. S.; Seo, Y., Cauchy-Schwarz inequality in semi-inner product  $C^*$ -modules via polar decomposition. J. Math. Anal. Appl., 394 (2012), 835-840.

Fujii, Jun Ichi; Fujii, Masatoshi; Moslehian, Mohammad Sal; Pečarić, Josip E.; Seo, Yuki, Reverse Cauchy-Schwarz type inequalities in pre-inner product  $C^*$ -modules. Hokkaido Math. J., 40 (2011), no. 3, 393-409. 46L08 (26D10 47A30)

Fujii, Jun Ichi, An external version of the Jensen operator inequality. Sci. Math. Jpn., 73 (2011), 125-128. 47A63

〔学会発表〕(計 8 件)

補間的作用素平均の Karcher equation における再生性 2014/3/18 日本数学会 2014 年度春季年会 学習院大学

正定値行列の幾何構造について 2013/11/7 RIMS 研究集会, 京都大学数理解析研究所

2 次正定値行列全体の hyperkahler 構造 2013/9/27 日本数学会 2013 年度秋季総合分科会 愛媛大学

作用素平均の補間的 path とその積分平均の評価 2012 年 11 月 25 日 作用素論・作用素環論研究集会 大阪教育大学

作用素平均の補間的な path について 2012 年 3 月 27 日 日本数学会 春季年会 東京理科大学

External type of Jensen operator inequality, 2011/11/15 RIMS 研究集会 スペクトル、数域などの作用素の幾何的特性量を用いた作用素の構造研究

Integral means induced by interpolation paths of operator means 2012 年 11 月 6 日 RIMS 研究集会

作用素平均から派生した 3 整数平均 2011 年 9 月 28 日 日本数学会 秋季分科会 信州大学

〔図書〕(計 件)

〔産業財産権〕  
出願状況(計 件)

名称：  
発明者：

権利者：  
種類：  
番号：  
出願年月日：  
国内外の別：

取得状況（計 件）

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
取得年月日：  
国内外の別：

〔その他〕  
ホームページ等

## 6. 研究組織

(1)研究代表者  
藤井 淳一 (FUJII JUNICHI)

研究者番号：藤井 淳一 (FUJII JUNICHI)  
研究者番号： 60135770

(2)研究分担者  
( )

研究者番号：

(3)連携研究者  
( )

研究者番号：