

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 8 日現在

機関番号：14602

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2011～2014

課題番号：23540202

研究課題名(和文) 正則分岐被覆構造のモジュライ・パラメーターに対する複素幾何学的研究

研究課題名(英文) Complex analytic geometry on the holomorphic branched covering structure

## 研究代表者

谷口 雅彦 (Masahiko, Taniguchi)

奈良女子大学・自然科学系・教授

研究者番号：50108974

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,800,000円

研究成果の概要(和文)：本研究の主目標は正則分岐被覆構造の種々の変形空間に対し幾何学的コンパクト化を構成し正則分岐被覆構造の退化や分岐を複素幾何学的に定式化することであったが、この目標について本来の研究対象であった有理関数の場合に、その力学系的モジュライ空間のコンパクト化理論として完成させることができた。種々の変形空間において有用なモジュライ・パラメーターを導入するという目標については、有限生成メビウス群に対しても、その双葉である縮小相似変換による反復合成力学系に対しても、非調和比座標がモジュライ・パラメーターとして有効であることを発見し、それらのコンパクト化とタイヒミュラー理論との関連を明らかにできた。

研究成果の概要(英文)：We establish the theory on compactification of the dynamical moduli spaces for rational functions almost completely. This is one of the main purposes of this research project. Actually, the main purpose is geometric construction of compactification for the deformation spaces of holomorphic branched covering structures and explicit formulation of degeneration and bifurcation of them from the viewpoint of complex geometry. This is achieved for the holomorphic branched covering structure induces by rational functions. Next, by using cross-ratio coordinates as moduli parameters, not only for finitely generated Moebius groups, but also for iterated function system by contracting self-similarities, we give complete description of the deformation spaces, and clarify the relation between compactification of them and the Teichmüller theory. It is the other main purpose of this project.

研究分野：複素解析

キーワード：複素解析学 正則分岐被覆 モジュライ・パラメーター

## 1. 研究開始当初の背景

(1) 一般に正則写像は正則分岐被覆構造を定め、1変数の場合には古くからさまざまな表現パラメータが考えられているが、正則分岐被覆構造の複素幾何学的理論の構築は実数関数の場合に比べて格段に難しく、1変数多項式写像の場合に限っても多くの未解決問題が今も残存している。有理関数の場合ですら多項式写像の場合よりはるかに困難さが増し、より一般的な1変数正則写像については研究の出発点ともいえる古典的型問題すら、いまだに満足のいく解決が得られていない。

(2) 近年正則写像の反復合成による力学系(正則力学系)が広く注目されてきているが、正則写像の力学系的構造とは、まさに正則分岐被覆構造の共役類であり、正則分岐被覆構造のモジュライ空間に対する構造解析なしには本質的な部分は明らかにならない。これが正則力学系の理論が1変数多項式写像の場合すら不十分であることの一つの理由である。

(3) 一方、正則分岐被覆構造が制限写像を考えることによって標準平面領域のモジュライ・パラメータとも密接に関連することが、ベルに端を発し代表者らが進めてきた研究により次第に明らかになってきていた。すなわち、複素構造のタイヒミュラー空間論やモジュライ問題は本来等角構造に関する変形問題であったが、正則写像を介して正則被覆構造のモジュライ空間とも密接に関係していることが発見されてきていた。ここで、タイヒミュラー空間とは上位構造を付加した複素構造の分類・変形空間であり、付加構造を緩和することにより種々のモジュライ空間を構成するための標準的な解析的手段を与える。したがって、正則分岐被覆構造の解析的研究においても、タイヒミュラー空間論の手法は極めて有効であることが、次第に認知されつつあった。

(4) さらに代表者は、本研究開始以前に数年にわたりこの方面での研究を進め、連携研究者の藤村雅代氏とともに、簡単な有理関数による正則分岐被覆構造の場合には定義域の制限により等角写像論において全く新しい表現空間であるベル表現空間が得られることを明らかにし、高知大学の諸澤俊介氏との共同研究では構造有限な超越整函数による分岐被覆構造を記述することに成功した。そのうえ多項式写像の場合には、連携研究者の藤村雅代氏との共同研究でその力学系的モジュライ空間の最小コンパクト化を正則分岐被覆構造の視点から構成することに成功していた。この最後の成果が、本研究の出発点でもあった。

## 2. 研究の目的

本研究では対象を1変数正則写像に限定し、代表者らのこれまでの研究を踏まえた正則分岐被覆被覆のモジュライ空間に対して基本的特性の解明を目指した。具体的には次の目標を設定して、正則分岐被覆構造のモジュライ空間に対する包括的な一般理論構築を目指した。

(1) 複素平面領域に対するベル表現空間とその部分多様体としての種々のタイヒミュラー空間を決定し、具体的なモジュライ・パラメータの導入により自己同型群の作用などをベル表現空間上で具体的に表現すること。

(2) 多項式写像や有理関数などの1変数正則写像に対して、それらの力学系的タイヒミュラー空間やモジュライ空間を具体的に構成し、その境界での相転移等の分岐現象を解析すること。

(3) 多項式写像や有理関数を与える正則分岐被覆構造のみならず、複素力学系の観点から、それらに近接するクライン群や反復関数系などから得られる正則分岐被覆構造に対しても、それら種々のモジュライ空間の幾何学的コンパクト化を具体的に定式化すること。

(4) 多項式写像や有理関数による正則分岐被覆構造や、クライン群や反復関数系による正則分岐被覆構造について、それらの力学系的モジュライ空間などを包括する正則分岐被覆構造のモジュライ空間論を構築し、具体的なモジュライ・パラメータを構成すること。

## 3. 研究の方法

正則関数の分岐被覆構造の研究には、まず基本的な関数族についての各論の深化が不可欠であった。

(1) そこで初年度の平成23年度においては、すでに相関関係が知られていた

・一般の位置にある極をもつ有理関数による正則分岐被覆構造のモジュライ空間、および

・有限連結な平面領域に対する複素構造のタイヒミュラー空間

に対する相互的な個別研究に重点を置いた。ここで正則分岐被覆構造に着目したモジュライ空間として、一般的位置にある有理関数だけを考えていたのでは不十分である。したがって、フルヴィッツ空間のコンパクト化などを含むより包括的な表現空間の導入が必要だが、特に一般の位置にある有理関数による正則分岐被覆構造のモジュライ空間に対し幾何学的に意味のあるコンパクト化を構

成することで包括的な表現空間の具体化を目指した。

(2) 次の段階として、より一般的な正則写像による正則分岐被覆構造の研究と一般平面領域の等角構造に関するタイヒミュラー空間との類似性の解明を主要な課題として、以下の目標を設定した。

- ・一般の有理関数による正則分岐被覆構造とその有理関数による正則力学系的構造の関係を解明する

- ・正則分岐被覆構造対応する複素構造、特に平面領域の等角構造に関するタイヒミュラー空間を決定し、それらの類似性を定式化する

- ・一般の正則分岐被覆構造の変形空間に対するモジュライ・パラメーターの導入と、上記の種々の空間との関係性を具体的に考察して一般的理論を構築する

(3) 研究を進める具体的方法としては、やはり個別の研究連絡はもとより、国内外の研究者を集めた研究集会やシンポジウムをくりかえし行った。また特に最終年次には、得られた成果を積極的に公表して関係する専門家諸氏との意見交換を活発に行った。

さらに、これらの各々の対象に対する研究成果の統合に向けた研究も目標に加えるため、関係する研究者たちとの個別の研究連絡はもとより、国内外の研究者を集めた当該テーマでの研究集会や研究打ち合わせをくりかえし行い、国内外の関係する研究者との交流をはかりつつ問題の提起・成果の整理を図った。また不断に成果を取りまとめて、各種の研究集会での講演や査読付き論文刊行により、成果の公表を積極的に行った。

#### 4. 研究成果

(1) 平成23年度には、有理関数による分岐被覆構造の変形空間と有限連結平面領域のベル表現空間との具体的な関連法則を解明するという本研究の主目標のひとつについて、連携研究者である防衛大学の藤村雅代氏に奈良女子大学の大学院生 Mohabi Karima 氏も加えた共同研究により、前者の特異値パラメータ等と後者の係数体表現との関係を具体的に定式化することができた。したがって、この目標については十分具体的な成果が得られ、目標は基本的には完遂できたと言える。その成果を取りまとめた査読付論文は、後日講演報告集 Topics in Finite or Infinite Dimensional Complex Analysis から公刊した(文献)。

また、実有理関数による分岐被覆構造の変形空間に限った場合の同様の定式化にも成功し、さらに幾何学的成果も加えた論文が奈良女子大学大学院生の玉栄清華氏との共著と

して Nihonkai Mathematical Journal から公刊された(文献)。

さらにもうひとつの主目標であった、有理関数による正則分岐被覆構造のモジュライ空間を幾何学的にコンパクト化するという目標についても完遂するための方針がほぼ解明され、平成23年度に広島で行われた国際研究集会 The 19th ICFIDCAA 2011 での招待講演において、代表者の方針の概要を公表した。同時にショットキー群の変形空間と標準編面領域としてのケーペ領域の変形空間との密接な関係も発見し、その成果を含む論文は京都工芸繊維大学名誉教授米谷文男氏との共著として Annual Reports of Graduate School, Nara Women's University から公刊された(文献)。

(2) 平成24年度には、本研究の主目標のひとつであった、正則分岐被覆構造の種々の変形空間に対し幾何学的コンパクト化を構成して正則分岐被覆構造の退化や分岐を複素幾何学的に定式化するという課題に対して、有理関数の場合にその力学系的モジュライ空間のコンパクト化理論をほぼ完成することができたが、その成果の速報として、査読付論文を査読付論文を講演報告集 Topics in Finite or Infinite Dimensional Complex Analysis から公刊することができた(文献)。

その研究の過程で、有理関数による力学系的モジュライ空間がリーマン球面上の配置空間と密接に関係していることが発見されたが、このような配置空間の具体的コンパクト化として知られていたマンフォールドらによるコンパクト化が非調和比関数族の関数解析的コンパクト化と一致することを証明できた。これは、奈良女子大大学院生の船橋里沙子氏との共同研究であるが、その成果をまとめた論文は船橋氏との共著論文として Acta Mathematica Sinica, English Series から公刊された(文献)。

さらに、等角力学系としての一般の無限生成ショットキー群に対する変形空間の大域座標としても非調和比座標を導入すべく、米谷氏との共同研究を継続して行った結果、以前公刊した論文における成果の一般化と応用が得られ、その成果をまとめた論文は共著論文として査読付論文集 Topics in Finite or Infinite Dimensional Complex Analysis から公刊された(文献)。

最後に、連携研究者の藤村氏および大学院生であった Karima 氏との共同研究として、長年の課題であった正則分岐被覆構造に関する Goldberg の問題に関しても低次数の場合にほぼ完全な解決を得た。その成果をまとめた論文は、三名の共著論文として Communications of JSSAC(Japan Society for Symbolic and Algebraic Computation) から刊行された(文献)。

(3)平成25年度には、種々の変形空間において有用なモジュライ・パラメーターを導入するという目標に関して、すでにリーマン球面上の配置空間に対しその具体的コンパクト化として知られているマンフォールドコンパクト化が非調和比関数族の関数解析的コンパクト化と一致することは証明し論文として公表していたが、その成果の応用として、ショットキー群の場合に等角力学系の変形空間における大域的モジュライ・パラメーターとしての非調和比座標を用いた具体的解析を行った。

特に米谷氏との共同研究では無限生成ショットキー群の場合に、前記の共著論文における成果の一般化と興味深い応用を発見することができた。その成果は講演報告集 Topics in Finite or Infinite Dimensional Complex Analysis に査読付き共著論文として公刊された(文献)。また有限生成メビウス群の場合にも、奈良女子大学大学院生の山本君代氏と共同研究として非調和比座標のモジュライ・パラメーターとしての特性の考察を行い、特にそのような座標と擬等角的タイヒミュラー空間論との関連性を明らかにした。その結果を含む諸成果を共著論文としてまとめたが、米国数学会の国際専門誌である Conformal Geometry and Dynamics から査読付き論文として公刊できた(文献)。

(4)最終年度の平成26年度には、当初の主目標であった有理関数の力学系的モジュライ空間のコンパクト化理論について理論的完成を果たした。その成果をまとめた論文は、複素解析と等角幾何学に関する国際集会の Proceedings に査読付き論文としてすでに受理された。2015年に公刊される予定である(文献)。

この目標と平行して、種々のモジュライ空間における有用なパラメータの導入と解析が残る最大の研究目標であったが、これまでの研究により等角力学系の場合には、非調和比関数族による大域的モジュライ・パラメーターの構成法が無限次元の場合にも一定の成果を得たので、さらに有限次元の場合に精緻な解析を行った。特に反復関数系の変形空間に対して、大域的モジュライ・パラメーターとしての非調和比関数族を用いた解析を行ない、メビウス群と双壁をなす反復合成系に対し等角力学系の場合と同様の成果を導き出すことができた。

具体的には、連携研究者の藤村雅代氏および奈良女子大大学院生の青木美和氏と共同で反復関数系の変形空間に対してもモジュライ・パラメーターとしての非調和比座標を用いた解析を行い、フラクタル幾何学における基本対象である dust-likeness locus に対する具体的特性の解明を行って顕著な成果を得た。それらの成果をもとめた論文は、国際的な専門誌として今年度に創刊された

Journal of Fractal Geometry の第一巻に査読付き共著論文として受理され、2014年の年末に公刊された(文献)。

以上から、本課題研究は満足できる数多くの成果を得たので成功裡に終了したといえる。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 10 件)

Masayo Fujimura and Masahiko Taniguchi, Rational functions with nodes, Proceedings of the International Symposium on Complex Analysis and Conformal Geometry, 査読有, 2015, 85-100.

Miwa Aoki, Masayo Fujimura, and Masahiko Taniguchi, The shape of the dust-likeness locus of self-similar sets, Journal of Fractal Geometry, 査読有, 1 (2014), 335-347.

Kimiyo N. Yamamoto and Masahiko Taniguchi, Cross ratio coordinates for the deformation spaces of a marked Mobius group, Conformal Geometry and Dynamics, 査読有, 17 (2013), 145-154.

Masayo Fujimura, Mohaby Karima, and Masahiko Taniguchi, The generalized Bell locus of rational functions and problems of Goldberg, Topics in Finite or Infinite Dimensional Complex Analysis, 査読有, 2013, 103-110.

Fumio Maitani and Masahiko Taniguchi, A condition for a circle domain and an infinitely generated classical Schottky group, Topics in Finite or Infinite Dimensional Complex Analysis, 査読有, 2013, 169-175.

Masahiko Taniguchi, On spaces of rational functions, Topics in Finite or Infinite Dimensional Complex Analysis, 査読有, 2013, 63-74.

Risako Funahashi and Masahiko Taniguchi, The cross-ratio compactification of the configuration Space of ordered points on  $\widehat{\mathbb{C}}$ , Acta Mathematica Sinica, English Series, 査読有, 28 (2012), 2129-2138.

Fumio Maitani and Masahiko Taniguchi, A condition for an infinitely generated Schottky group to be classical, Annual Reports of Graduate School of Humanities

and Sciences, Nara Women's University、  
査読無、27 (2012), 181-188.

Masayo Fujimura, Mohaby Karima, and  
Masahiko Taniguchi, The Bell locus of  
rational functions and problems of  
Goldberg, Communications of JSSAC(Japan  
Society for Symbolic and Algebraic  
Computation), 査読有, 1 (2012), 67-74.

Sayaka Tamae and Masahiko Taniguchi,  
Garden representation and interior  
variation of real rational functions,  
Nihonkai Mathematical Journal, 査読有、  
22 (2011), 39-47.

〔学会発表〕(計 1 件)

谷口 雅彦、On spaces of rational  
functions、国際研究集会 The 19th  
International Conference on Finite or  
Infinite Dimensional Complex Analysis and  
Applications (19th ICFIDCAA in Hiroshima)、  
2011 年 12 月 12 日 11:00-12:00、アステール  
プラザ(広島市)。

〔その他〕

ホームページ等

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

谷口 雅彦 (MASAHIKO Taniguchi)  
奈良女子大学・自然科学系・教授  
研究者番号： 50108974

### (2) 研究分担者

なし

### (3) 連携研究者

藤村 雅代 (MASAYO Fujimura)  
防衛大学校・総合教育学群・講師  
研究者番号： 00531758