

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 2 日現在

機関番号：15401

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2011～2013

課題番号：23540207

研究課題名(和文)複素大域解析による特異現象の構造研究

研究課題名(英文)Study of structures of singular phenomena via complex global analysis

研究代表者

吉野 正史 (Yoshino, Masafumi)

広島大学・理学(系)研究科(研究院)・教授

研究者番号：00145658

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,800,000円、(間接経費) 1,140,000円

研究成果の概要(和文)：研究期間中での成果は非可積分ハミルトン系で合流型超幾何方程式系に表せるものに対して、モノドロミーの具体的な表示を第一積分を用いて与えたことである。この方法の新しい点はモノドロミーの計算でKAM理論と類似の手法が使えることを示した点である。これは接続問題や一般の方程式系にも適用可能であり、今後引き続き研究を継続する。他の研究成果は特異摂動型の多変数フックス型方程式の特異摂動型の形式解のボレル総和可能性を示したことである。これは従来一変数の場合の結果が知られていた。この証明方法を基にして、形質が変化する進化型3種ロトカボルテラ系の漸近解析を実行し解析的な挙動を明らかにした。

研究成果の概要(英文)：We have obtained the concrete formula of the monodromy of a certain confluent hypergeometric system which can be written in a Hamiltonian form. The method may be extended to more general system of equations and may be applied to the study of connection formulas near the irregular singular point. The method has some similarity to the so-called KAM theory. The other result of the research is the proof of the Borel summability of a singular perturbative formal solution of a certain multi-dimensional Fuchsian equation. This results was proved in the case of one variable. Using the method in the above we have analyzed the analytic behavior of Lotka Volterra system of three species with evolutionary effect.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：ハミルトン系 非可積分性 モノドロミー ボレル総和法 モーメント総和法 特異摂動 完全漸近解析 超幾何方程式系

1. 研究開始当初の背景

この研究では、(1)特異ベクトル場の特異点の近傍での構造 (2)ハミルトン系の非可積分性の構造 (3)小分母の存在が引き起こす発散の構造 (4)構成種の滅亡がおこる多自由度競争系での種の多様性と生態系機能の安定性の数学的な研究など、数学及び自然科学で既存の研究が十分な成果を得られていない分野での研究を対象としていた。このような分野ではすでにそれぞれのテーマに関して先行研究が存在していた。それらの先行研究では、特異構造に注目した複素大域解析のアイデアを取り入れた研究はなされていなかった。これを考えることにより、新しい成果が期待された。例として、シュレディンガー作用素に対する WKB 解析の最近の著しい発展とそれによる接続係数の計算に代表される成果がある。これらの成果は、ポレル総和法と代数解析学を基にした複素多様体上での特異性の解析が成功している例である。本研究では、上述の問題に対しても、複素特異性の解析がより深い成果をもたらすと予想し取り組んだ。この予想は、H22年度終了予定の科学研究費基盤研究(C)(一般)「代表者：吉野正史 (H20~22) 研究課題名：特異偏微分作用素の数論的現象と完全漸近解析の研究」の成果を基にしている。この研究から、本申請研究につながるアイデアがえられ、函数方程式、力学系などの数学理論、生態学などにも応用が期待された。このため、世界的にも研究が進められようとしていた分野、テーマであった。

2. 研究の目的

次の4つを目的として研究は進められた。

(1) 特異ベクトル場の研究。すなわち特異ベクトル場を複素大域解析の視点から研究するため、複素パラメータとして、特異ベクトル場の特異点での線形部分の固有値をとる。これはモノドロミー保存変形の類似であり、このような立場に立つことにより、新しい知見を得ることができる。パラメータ (= 固有値) は、解析的な変換に対して剛性を持つが、パラメータに対する特異性を許容し、その特異性を調べることにより、変換論を展開することを目的とした。H20~22年度の吉野正史の基盤研究(C)(一般)で特殊な場合はすでにわかっていたので、より広い作用素に理論を拡張していくことを目的とする。この際、基礎理論としてポレル総和法、完全漸近解析とパルベ方程式、また必要に応じてレゾナンスと複素大域特異性に注目して研究をする。

(2) ハミルトン系の非可積分性の研究。このテーマは Ziglin 理論、ガロア理論とともに近年研究が進められているが、本研究では、Taimanov の研究(Inv. Math. 2000)を基にして、エントロピーと非可積分性の研究に注目して、複素大域解析の視点から、これらの研究とは異なる非可積分性の構造をモノドロミーの観点とあわせて、明らかにすることを

目的とする。より具体的には、可換でない2つのハミルトン系の和となるハミルトン系の非可積分性をモノドロミーの構造、第一積分の大域的特異性とエントロピーの点から、調べることを目的とする。この場合、複素パラメータとして、座標変数のうち適当な変数を取り、その変数に対する大域的特異性の研究を目的とする。特別な場合には、先行研究があり、これらの結果を拡張し本研究の問題に適用することを目的とする。(3) 小分母の存在が引き起こす発散の構造の解析。この問題に関しては、その基礎的な部分は、すでに H20~22 年度の吉野正史の基盤研究(C)(一般)において、基礎結果があるので、ここでは、複素パラメータに関する解の極の分布と発散との関係に、より重点をおいて研究を進める。(4) 多自由度競争系での種の多様性の解析。この研究は、競争関係にある非常に多くの種からなる生態系が、環境破壊などの要因で構成種の一部が絶滅あるいはそれに近いことが起こった時の生態系機能の安定性を研究する。たとえば、森林生態系での二酸化炭素吸収量の環境破壊に対する安定性を考察する。構成種の多様性は、このような場合でも安定性をもたらすと期待されるが、これをロトカ・ボルテラモデルを用いて数学的に示すことが主目的である。構成種数が巨大であり、その構成種の一部の絶滅を伴う変動がある場合、モデルの微分方程式を解いてその性質を調べることは、既存の理論では、困難を伴う。ここでは、Toeplitz 作用素の理論と適切なパラメータの導入により、複素大域特異性の解析を用いて、これを実行することを目的とする。

3. 研究の方法

研究は(1)から(3)は研究代表者が単独で実行し、研究テーマ(4)では共同研究も参考にして実行された。基本的な方法は国内外の研究集会への参加と専門家との研究討論であり、それをもとに文献等を検討しながら、広島大学で研究は進められた。以下で年度ごとの方法について詳述する。

平成 23 年度の研究方法について。研究目的(1)(3)を中心に行う。すでに知られている結果を複素大域解の特異性の視点から理解しなおすため、関連する分野の研究者と研究会などで研究討論を進め、必要に応じて共同研究を行った。具体的には、京都大学数理解析研究所の竹井氏を中心とするパルベ方程式と完全漸近解析グループ、名古屋教育大学と名城大学を中心とするポレル総和法と不確定型常微分方程式系の研究グループ、田原氏(上智大)、山澤氏(芝浦工大)を中心とする特異微分方程式と特異解の研究グループなどがあげられる。国外では、W.Balser氏(ウルム)を中心とするドイツ、ポーランドのグループとの研究討論を行った。ハミルトン系の非可積分性の研究に関しては、伊藤氏(金沢大)、矢ヶ崎氏(新潟大)を中心とするハミルトン系の研究グループ

との研究集会等での協力のほか複素力学系の研究集会にも参加した。また、京都大学、神戸大学、北海道大学のパンルベ方程式の研究グループとも、研究会に参加して、当該研究に生かした。

生態学への応用に関する研究。国立環境研究所の田中氏のグループとの共同研究を中心にして、つくばと東京を相互訪問し、協力して研究を進めた。競争行列の形を一般にして、できるだけ現実のデータと合うようなモデルの構成とその解析を複素解析的手法を用いておこなった。これ以外にも、基本方程式に、進化効果あるいは、揺らぎの効果を入れたモデルの検討を開始した。これは、平成24年度以降の研究に継続した。

平成24年度以降の研究手法。研究体制に変更はなく、上述の研究グループとの研究協力、および研究集会、国際会議、相互の訪問を通して、研究をおこなった。研究が進展したので、複素大域解析の方法による特異現象の解明を一階の方程式に限らず、高階の偏微分方程式に対して実行した。

生物学への応用に関しては、前年度に引き続いて国立環境研の田中氏のグループと研究を進めた。テーマは、確率効果をいれた大自由度系の解析を統計的手法でなく、数学的に厳密な方法でおこなうことと、環境破壊による生態系の機能評価理論で、評価モデルの構築をおこなった。評価モデルの構築は、本研究での計画は、理論面での複素大域解析の応用の可能性の検討を重点的におこなった。

4. 研究成果

研究成果は以下のとおりである。

(1) 平成23年度の研究成果。解析的非可積分なハミルトン系の形式的第一積分を指数型級数を用いて構成し、その大域的特異性を調べた。(W.Balser (Ulm 大学)との共同研究)。特異ベクトル場の線形化問題で小分母が現れるとき、完全漸近解析を用いて新しい線形化理論を得た。グルサー問題で小分母が現れるときの既存の結果を、完全漸近解析から再証明した。この研究は次年度に引き続いて行われ業績リストの論文の形にまとめて出版した。特異ベクトル場の線形化問題で小分母が現れるとき、多重角領域での変換方程式の正則解の存在を用いて、Diophantine 条件を用いない線形化の方法を与えた。解析的非可積分な共鳴ハミルトン系の指数型形式第一積分のポレル総和可能性を証明した。この研究は翌年度に引き続いて行われ論文リストの論文として出版された。2011年8月、ポーランド Banach center での研究集会で招待講演し、W.Balser 教授とハミルトン系の指数型形式第一積分のポレル総和可能性について研究を行った。2011年12月の国際会議 ICFIDCAA で招待講演を行った。講演内容は出版した。2012年3月に広島大学で接続問題と漸近解析の研究集会を開催した。芝浦工大の山澤氏と多変数フックス型偏微

分方程式の解のポレル総和可能性と特異性に関して明らかにした。成果は論文として準備中。国立環境研究所の田中喜成主任研究員と環境リスク評価モデルへの漸近解析理論の応用を行い、進化型3種捕食系を中心に研究し、モデルの解析的な性質を明らかにした。また、2012年2月に関連する研究会を広島大学で開催した。

(2) 平成24年度の研究成果。解析的非可積分な共鳴ハミルトン系の指数型形式第一積分のポレル総和可能性を証明した。(業績リスト)。解析的可積分でない共鳴ハミルトン系の角領域型の領域での完全積分可能性を証明した。(業績リスト)。グルサー問題で小分母が現れるときの既存の結果を、完全漸近解析から再証明した。(業績リスト)。なめらかな関数のクラスで完全積分可能であるが、解析的な関数のクラスで完全積分可能でないハミルトン系の存在を示し、その性質を調べた。(業績リスト)

ハミルトン系の第一積分の接続問題について研究した。2012年12月に日本数学会関数方程式分科会総合的研究で招待講演を行った。講演題目は、非可積分なハミルトン系の接続問題。2012年10月に広島大学で数理解析セミナーの研究集会を開催した。また、広島大学数理解析セミナーで、通年で定期的に講演会を開催して、講演者と研究討論を行った。詳細は広島大学数学専攻のホームページで公開中。2013年3月に広島大学でポレル総和法と漸近解析の研究集会を開催し研究討論を行った。詳細は吉野のホームページで公開中。芝浦工大の山澤氏と多変数フックス型偏微分方程式の解のポレル総和可能性と特異性の関係を示した。国立環境研究所の田中喜成主任研究員と環境リスク評価モデルへの漸近解析理論の応用を行い、進化型3種捕食系を中心に研究し、生態学会で発表した。

(3) 平成25年度の研究成果。ハミルトン系の第一積分の接続問題について研究し具体的な接続公式を得た。2013年10月に広島大学で数理解析セミナーの研究集会を開催した。詳細は広島大学数学専攻のホームページで公開中。2014年3月に広島大学でポレル総和法と漸近解析の研究集会を開催し、研究討論を行った。詳細は、吉野のホームページで公開中。芝浦工大の山澤氏と多変数フックス型偏微分方程式の解のポレル総和可能性と特異性の研究を実行し論文を準備中。国立環境研究所の田中喜成主任研究員と環境リスク評価モデルへの漸近解析理論の応用を行い、進化型3種捕食系を中心に研究し、生態学会で発表し論文を業績リストの論文で発表した。ポーランドの研究グループとモノドロミーと漸近解析をテーマとして、研究討論を実施し、また2013年8月に共同主催者として、ポーランドのバナッハセンターで国際会議を開催した。また、この会議に合わせて、ワルシャ

ワで日本人研究グループとポーランド研究グループで共同研究を行った。この時の論文は準備中。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計8件)

吉野正史、田中嘉成、Global Properties of Evolutional Lotka-Volterra System、Advances in Pure Mathematics、査読有 Vol.3、No.9、2013、709-718

DOI: 10.4236/apm.2013.39097

吉野正史、Smooth-integrable and analytic-nonintegrable resonant Hamiltonians、RIMS Kokyuroku Bessatsu、査読有 Vol.40、2013、177-189

<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp>, ISSN 1881-6193.

吉野正史、Asymptotic analysis to Goursat problems、RIMS Kokyuroku Bessatsu、査読有 Vol.37、2013、247-262
<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp>, ISSN 1881-6193.

吉野正史、Analytic- nonintegrable resonant Hamiltonians which are integrable in a sector、Proceedings of the 19th ICFIDCAA Hiroshima 2011、Tohoku University Press、査読有 2012、85-96
<http://www.tups.jp>, ISBN 978-4-86163-219-8

吉野正史、Summability of first integrals of a C^1 -nonintegrable resonant Hamiltonian system、Banach Center Publ.、査読有 Vol. 97、2012、169-178.
DOI:10.4064/bc97-0-13

吉野正史、Sectorial solution to semilinear singular partial differential equation、manuscripta math. 査読有 Vol.137、441-455、2012

DOI 10.1007/s00229-011-0474-5

吉野正史、Asymptotic property of divergent formal solutions in linearization of singular vector field、Publications in RIMS、査読有 Vol.47 No.4、2011

DOI 10.2977/PRIMS/57

吉野正史、Werner Balser、Integrability of Hamiltonian systems and transseries expansions、Math. Z. 査読有 Vol.268、2011、257-280.

DOI.10.1007/s00209-010-0669-6

[学会発表](計5件)

吉野正史、Stokes geometry and summability in the linearization problem for a singular vector field、Global study of differential equations in the complex domain、2013年9月6日、Warsaw(Poland).

吉野正史、Singular perturbative analysis of Poincare's theorem for a singular vector field、Formal and Analytic

Solutions of Differential and Difference Equations、2013年8月30日、Warwar (Poland)

吉野正史、非可積分なハミルトン系の接続問題、日本数学会関数方程式分科会総合的研究、2012年12月15日、東大。

吉野正史、Monodromy property of analytic non integrable Hamiltonian system、The 19th International Conference on Finite or Infinite Dimensional Complex Analysis and Applications、2011年12月14日、Hiroshima (Japan)。

吉野正史、Summability of first integrals of a resonant Hamiltonian system、Formal and Analytic Solutions of Differential and Difference Equations、2011年8月10日、Bedlewo (Poland)

[その他]

ホームページ等

<http://home.hiroshima-u.ac.jp/yoshinom/>

6. 研究組織

(1)研究代表者

吉野正史 (YOSHINO MASAFUMI)

広島大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：00145658

(2)研究分担者

()

研究者番号：

(3)連携研究者

()

研究者番号：