

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 5 月 9 日現在

機関番号：17102

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2011～2013

課題番号：23540214

研究課題名(和文) 超幾何関数の研究

研究課題名(英文) Study of hypergeometric functions

研究代表者

吉田 正章 (YOSHIDA, Masaaki)

九州大学・数理(科)学研究科(研究院)・その他

研究者番号：30030787

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,900,000円、(間接経費) 1,170,000円

研究成果の概要(和文)：1) 古典的超幾何的黒写像の的は理満球面であったが、的を又曲3-空間、髷叱咤3-空間にした。又黒像曲面の単位法線は髷黒であり、髷黒像曲面の単位法線は又黒である。それら法線の測地的延長は理想境界なる理満球面に至り、元祖黒及び裏黒を回復する。これらの曲面は方程式の特異点以外にも特異点を有し、元祖黒以上の幾何的不変量を提供する。

2) 実射影空間内の一般の位置にある超曲面配置は空間 n 次元のとき $n+3$ 枚が組み合わせ的に一意性を有し興味深い。組み合わせ的一般論のあと、巡回群作用が明示的な表示に取り組んでいる。

研究成果の概要(英文)：1) Original Schwarz map has the Riemann sphere as its target. I proposed the hyperbolic and de Sitter Schwarz maps, whose targets are hyperbolic 3-space and de Sitter 3-space, respectively. The unit normals of the hyperbolic Schwarz image surface are de Sitter Schwarz maps, and vice versa. Geodesic extension of the normals hit the ideal boundary which turn out to be the original and the derived Schwarz maps. These new maps have singularities outside the singularities of the differential equation. These singularities offer geometric invariants.

2) Hyperplane arrangements in the real projective spaces. $n+3$ hyperplanes in general position in n -space is combinatorially unique. I studied the action of the cyclic group of order $n+3$ on the chambers cut out by these hyperplanes.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：超幾何関数 黒写像

1. 研究開始当初の背景

- 1) 従来の黒写像の研究は測多価群が既約な場合に限られていた。可約な時の黒写像の研究は存在しない。可約な方程式及びその黒写像は既約分子の研究に帰すると多くの専門家は思っていた。
- 2) 黒写像の研究は20世紀を通じて、高次元化ばかりが研究されてきた。双曲的黒、弩叱咤的黒、裏黒写像は知られてもいなかった。複素解析的な微分方程式の研究者は実曲面やその特異点には注目して来なかった。
- 3) 超平面配置の研究は主に複素の世界で、組み合わせてき、表現論的になされてきた。実射影空間内の超平面の研究も組み合わせ的なものに限られていて、配置の切り分ける部屋の構造は、最も易しい時でも、今まで十分理解されていなかった。一般の位置にある6枚の平面で囲まれる図形は二つあり、一つは立方体であるが、後一つは一つの辺を共有する2つの5角形と3角形2つと4角形2つとで囲まれたものである。6面体と言うと普通は前者をさす。驚いたことに後者には名すらついていない；その形状から餃子と命名¥。
- 4) 捩表裏路地群の研究の歴史は古いが、主定理は各種の消滅定理であり、表裏路地群を扱う上で一番大事な交点理論が欠如していた。
- 5) 黒写像の離散化は考えられたことは無かった。

2. 研究の目的

- 1) 測多価群が可約な時でも幾何的に興味ある振る舞いをするところがあることを示したかった。可約な方程式及びその黒写像は既約分子の黒写像を底とする繊維構造を有するであろうと言うことは想像が着くが、それが興味ある繊維構造を持ちうることを実例により示すことが目的である。
- 2) もともとの黒写像の研究の高次元的一般化が多くなされ、代数幾何、数論と関係してそれなりに面白いことが色々わかってきたが、そもそも高次元的一般化は誰でも思いつくことで、複雑・代数幾何的になってきた今、私は19世紀終わり頃の黒写像の出発点を見直すべきだと思った。そして高次元的一般化より面白い数学があることを示したかった。先ず、指数が実数の時のみにされてきたのを純虚数にして、測多価群が一寸来群になるときを調べた。その次に従来の黒では2つ

の解の比をとるのであるが、それを止めて2次元複素空間に値を取らせ、像曲線を研究した。元々の超幾何関数(高次元化、高階化をしない)でもっと本質的なことはないかと長年考えてきた。後に述べる又黒、弩黒、裏黒の解説参照。

3) 射影平面内の一般の位置にある5本の直線で平面は5角形1つ、3角形5つ、4角形5つに分かれる。その位置関係は、中心に五角形があり、その各辺に3角形が隣接していて、二つの隣りあう3角形の間に4角形があるのである。このような理解を3次元内の6枚で得ることを第一目標にする。この場合は中心になる図形は無い。次元の偶奇で状況が甚だ異なる。4次元の場合には中心があるので、2次元の時に近く理解したい。また一般次元でも理解を進めたい。このような初等的なことにすら面白い数学があることを示したかった。

4) 捩表裏路地群の交点理論を作ること。特異点を実数上定義された超平面で一般の位置にある場合が一番簡単であるが、それから外れて、実際によく出現する場合にも通用するまで一般化しておくことを目標にする。

5) 又黒、弩黒の離散化が夢である。

3. 研究の方法

分らないことは専門家に訊いて、興味を持ってくれれば一緒にやる：

- 1) 微分幾何の専門家の佐々木氏、手多関数の専門家の松本氏(北大)何の専門家の寺杣氏(東大)やった。
- 2) 微分幾何の専門家の佐々木氏(神戸大)の専門家の野呂氏(神戸大)de Sitter 空間の専門家の藤森氏(岡山大) 曲面の特異点の専門家の佐治氏(神戸大)と一緒にやった。
- 3) 代数幾何の専門家の趙氏(九州大) 直感的な幾何ではこの人有と言える Bernard Morin(Paris)氏とその協力者の Francois Apery(Mulhouse)氏と一緒にやった。
- 4) 捩表裏路地群の研究を始めから一緒にやってきた松本氏や趙氏や3町氏(阪大)に協力を求める。
- 5) 離散微分幾何の専門家の W. Rossman (神戸大) T. Hoffmann (Munchn 工大)と一っしょにやった。

4. 研究成果

1) (3,6)型超幾何関数の測多価群が可約の場合に黒写像に幾何的意味がある場合のけんきゅうが始めた；この微分方程式は4次元空間で定義されているが、或る2次元部分空間に制限した法廷気についての部分的結果を得た。前刷りあり：Period maps of reducible hypergeometric equations and mixed Hodge structures (with Matsumoto, Sasaki, and Terasoma)。

2) 元祖超幾何微分方程式の黒写像的は複素射影直線であった。この方程式の測多価群は $GL(2, \mathbb{C})$ の部分群であり、この群が自然に作用するのは複素射影直線でなく、それを理満球面と思ってその内部の又曲空間や外部の弩叱空間である。そこで、黒写像をそれらの3次元空間を的にするように拡張した；それらは又黒写像、弩黒写像と呼ばれるようになった。それらの黒写像の相互間の関係を調べた：又黒写像と弩黒写像は双対を成す。又黒写像及び弩黒写像の像曲面の法線を測地的に延長し理想境界と当たるところが元祖黒及び裏黒像である。また像曲面の特異点の様子を調べた。前刷りあり：Schwarz maps for the hypergeometric differential equations (with Fujimori, Noro, Saji, Sasaki)

3) 実射影空間内の超平面が切り取る部屋の様子を調べた。特に n 次元空間内の $n+3$ 枚が特に興味あり、 $n=2,3,4$ のとき詳しく調べ、一般次元のときに次元の偶奇で異なる様子も研究した。前刷りあり：Structures of chambers cut out by Veronese arrangements of hyperplanes in the real projective spaces.

4) 一つの応用として、 F_A 型高次元超幾何微分方程式の測多価群の生成元を、捺表路地群の交点形式を使って、紐を引っ張る作業をせず、純代数的に求めることに成功。下の論文(4)。

6) 解析的には一番難しいが、微分方程式は簡単な絵有方程式(究極の合流型超幾何方程式)の黒写像の離散化に成功。下の論文(3)。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 3件)

1) Six points/planes in the 3-space (with

K. Cho and K. Yada) Kumamoto J. Math. 25(2012), 17--52.

2) Veronese arrangements of hyperplanes in real projective spaces (with K. Cho), Internat J Math. 23(2012), 1--16.

3) Discrete flat surfaces and linear Weingarten surfaces in hyperbolic 3-space (with T. Hoffmann, W. Rossmann, T. Sasaki), Transactions of AMS 364(2012), 5605--5644.

4) Monodromy of Lauricella's hypergeometric F_A -system (with K. Matsumoto), Ann. Sc. Norm. Super. Pisa XIII(2014), 1--27.

[学会発表](計 7 件)

射影空間内の6枚の平面によって切り出される多面体、超幾何研究集会、神戸大学 January, 2012.

無手勝流で臨む超幾何微分方程式の可約性、超幾何研究集会、神戸大学, January, 013.

Schwarz maps for hypergeometric functions, Istanbul (Turkey), June, 2013.

超幾何的黒写像、部分多様体の幾何、京都大学数理解析研究所, June 2013.

Schwarz maps for hypergeometric functions, Mulhouse (France), November, 2013

超幾何的黒写像、超幾何研究集会、神戸大学、January, 2013.

Schwarz maps for hypergeometric functions, Nijmegen (Holland), January 2014.

[図書](計 0 件)

[産業財産権]
出願状況(計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

取得状況(計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：

種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

吉田正章 (6 5)

研究者番号：30030787

(2) 研究分担者

()

研究者番号：

(3) 連携研究者

()

研究者番号：