

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 5 月 9 日現在

機関番号：17102

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2011～2013

課題番号：23540215

研究課題名(和文) 各種解析的手法による作用素に関する不等式の研究

研究課題名(英文) Study on operator inequalities based on various analytic methods

研究代表者

幸崎 秀樹 (KOSAKI, Hideki)

九州大学・数理(科)学研究科(研究院)・教授

研究者番号：20186612

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,800,000円、(間接経費) 1,140,000円

研究成果の概要(和文)：各種作用素平均のノルム比較の為、平均のある種の比として得られる関数の正定値性を調べる必要がある。Fourier変換を書き下す事により、(Bochnerの定理に基づき)この理論に現れる多くの比の正定値性の判定結果を蓄積した。また、Fourier変換の計算が不可能な場合でも、更に強い性質である無限分割可能性を調べる事により、多くの比の正定値性の判定が実行できた。これらの判定結果及びその作用素平均の理論への応用を論文として発表した。

このような正定値性判定結果が、量子情報理論における完全正写像の研究に有用であることが分かったので、この分野の専門家と研究を行い、共著論文を発表した。

研究成果の概要(英文)：To get norm comparison results for operator means we have to check positive definiteness of ratios of relevant means. By computing Fourier transforms we have checked positive definiteness of a variety of ratios. We have also made use of the concept of infinite divisibility to establish this for some ratios whose explicit computations of Fourier transforms seem hopeless.

On the other hand, our technique was proved useful for study on completely positive maps appearing naturally in quantum information theory.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析

キーワード：作用素平均 正定値関数 量子情報理論

1. 研究開始当初の背景

1951年に発表された E. Heinz による分野の古典とも言える論文において、ヒルベルト空間の正作用素 H, K の分数冪(及びもう一つの作用素 X)を含むノルム不等式

$$\| |H X K^{1/2} + H^{1/2} X K| \| \leq \| |H X + X K| \| \quad (0 < \theta < 1)$$

が示された。この論文では $\| | \cdot \|$ は作用素ノルムであったが、20年程前に実はこの不等式は任意のユニタリ不変ノルムに関しても成立することが示され、今日では何通りもの証明が知られている。特に $\theta = 1/2$ の場合には

$$2 \| |H^{1/2} X K^{1/2}| \| \leq \| |H X + X K| \|$$

となり、ユニタリ不変ノルムに関する(ある種)作用素版相乗・相加平均不等式と見なせる。これらの研究に触発され、更に一般的な作用素平均の研究、特にそれらのノルムの比較の研究が世界各地の研究グループで活発に行われるようになった。スカラーに対する様々な意味での「平均」が知られているが、相乗、相加平均のように形が単純なものについては、その作用素版がどうあるべきかを想像するのは比較的容易である。(実はこの点に関して、状況はそう単純ではないのだが...) しかし、更に一般的な平均に対応する「作用素平均」の定義がどうあるべきかという問題はそれ程明らかではない。

連携研究者日合氏と代表研究者は以前共同研究を行い、作用素平均の(一つの)一般論を構築し、2003年に Springer のレクチャーノートとして発表した。ここで提唱された作用素平均の定義は旧ソ連の研究グループにより開発された Stieltjes double integral 変換の理論に基づいており、これは行列どうしの Schur 積の概念の無限次元版また連続版とも言えるものである。我々の一般論で行われた主な事は次の二点である。

(i) 「作用素平均」の公理的取り扱い: すなわちまず scalar に対する(自然な) mean $M(s, t)$ のクラスを設定する。このクラスの $M(s, t)$ から出発して対応する作用素平均 $M(H, K)X$ を (Stieltjes double integral 変換を用いて) 構成する、

(ii) 二つの作用素平均 $M(H, K)X$ および $N(H, K)X$ の間に Heinz 不等式のようなノルム不等式が成立する為の判定条件: すなわち、二つの (scalar) mean から自然に生じる関数比 $M(e^t, 1)/N(e^t, 1)$ が正定値関数になることが、ノルム不等式が成立する為の必要十分条件である。

例えば上の Heinz 不等式は丁度双曲線関数比 $\cosh(\theta x)/\cosh(x)$ の正定値性に対応している。

我々の公理的取扱により、研究対象となる作用素平均のクラスが格段に広がった。また作用素平均のクラスを適切に設定した為、ノルム不等式の成立ばかりでなく、非成立のチェックも可能となった。これにより、種パラメータを含む従来の作用素ノルム不等式の研究が大きく前進した。

2. 研究の目的

上に説明したように、日合氏と研究代表者はヒルベルト空間の作用素に対する「作用素平均」とそのノルム比較に関する一般論を構築した。この理論が適用可能な平均のクラスに関してより精密な情報を得て、一般論を更に整備・深化させ、またより汎用性の高いものに仕上げる事が第一の研究目的である。

その為には、この研究で自然に現れてくる関数の正定値性の判定が必要となるが、近年の研究代表者による研究により、正定値性よりずっと強い概念である無限分解可能性の重要性も明らかになってきている。

第二の研究目的は、我々の研究で現れるなるべく多くの関数に対してその無限分解可能性を判定し、またこの理論における無限分解可能性の真の意味を解明する事である。

3. 研究の方法

作用素平均およびそのノルム比較が主な研究テーマであり、作用素論的また更に広く関数解析的手法が必要となることは言うまでもない。しかし、研究目的で説明されたように、まずは多くの関数の正定値性判定を Bochner の定理を用いて行うので、Fourier 変換の計算が必要となる。一般的な教科書、公式集で扱われないような関数の Fourier 変換の計算も必要であり、実解析的また複素解析的手法を駆使して計算を実行する必要がある。また更に、無限分解可能性をも調べるので、時には確率解析で無限分解可能測度の特徴付けとして有名な Lévi-Khintchine 型積分表示の利用も必要となる。このように、通常の作用素論・関数解析的手法は勿論のこと、実解析、複素解析、Fourier 解析また確率解析といった多岐にわたる解析的手法を駆使する必要がある。

4. 研究成果

スカラー平均より自然な形で作用素平均が

構成されが、このような作用素平均のノルム比較の為に、対応するスカラー平均の比として現れる関数の正定値性のチェックが必要となる(上の(ii)参照)。正定値性のチェックの常套手段はBochnerの定理であり、その適用の為にFourier変換の具体的な形が必要となる。従って、各種ノルム平均不等式の研究の為に系統的なFourier変換の計算が必要であり、我々の理論に現れる多くの比の正定値性の判定結果を蓄積した。

Fourier変換の計算が不可能な場合でも、更に強い性質である無限分割可能性を調べる事により、多くの比の正定値性の判定を実行した。

以上のような正定値性判定結果及びその為のテクニックが、量子情報理論における完全正写像の研究にも有用であることが分かったので、この分野の専門家と研究を行った。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計7件)

H.Kosaki,
Positive definiteness of functions with applications to operator norm inequalities,
Mem. Amer. Math. Soc., 査読有,
212 (2011). pp. v + 80.

T.Kajiwara and Y.Watatani,
C*-algebras associated with algebraic correspondences on the Riemann sphere,
J. Operator Theory. 査読有,
65 (2011), 427-449.

F.Hiai and T.Sano,
Loewner matrices of matrix convex and monotone functions,
J. Math. Soc., Japan, 査読有,
64 (2012), 343-364.

T.Kajiwara and Y.Watatani,
KMS states on finite graph C*-algebras,
Kyushu J. Math., 査読有,
67 (2013), 83-104.

F.Hiai, H.Kosaki, D.Petz and M.B.Ruskai,
Families of completely positive maps associated with monotone metrics,
Linear Algebra Appl., 査読有,
439 (2013), 1749-1791.

H.Kosaki,
Trace Jensen inequality for self-adjoint operators in semi-finite von Neumann algebras,
Internat. J. Math., 査読有,
24 (2013), 1350075 (15 pages).

T.Kajiwara and Y.Watatani,
C*-algebras associated with complex dynamical systems and backward orbit structure,
Complex Analysis and Operator Theory, 査読有,
8 (2014), 243-254.

[学会発表](計1件)

H. Kosaki,
Infinite divisibility in study of operator means,
Seminaire D'Anlysis Fonctionnelle,
Universite de Franche-Comte,
Besancon, France, 2011年9月

[図書](計0件)

[産業財産権]

出願状況(計0件)

取得状況(計0件)

[その他]

特になし

6. 研究組織

(1)研究代表者
幸崎 秀樹 (KOSAKI, Hideki)
九州大学・数理学研究院・教授
研究者番号: 20186612

(2)研究分担者
綿谷 安男 (WATATANI, Yasuo)
九州大学・数理学研究院・教授
研究者番号: 00175077

(3)連携研究者
日合 文雄 (HIAI, Fumio)
東北大学・名誉教授
研究者番号: 30092571

(4)連携研究者

佐野 隆志 (SANO, Takashi)

山形大学・理学部・教授

研究者番号： 20250912