

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 9 日現在

機関番号：24402

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2011～2014

課題番号：23540220

研究課題名(和文)放物型方程式のポテンシャル論的及び関数解析的研究

研究課題名(英文)Potential theory for parabolic equations with functional analysis

研究代表者

西尾 昌治(Nishio, Masaharu)

大阪市立大学・大学院理学研究科・准教授

研究者番号：90228156

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,900,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では、熱方程式やそこから派生した放物型作用素をポテンシャル論や関数解析の手法を用いて解析した。ポテンシャル論から得られる平均値の性質が重要で、それによってここで取り扱う方程式の解のなす空間をベルグマン空間的な性質を捉えて関数解析的に詳しく検討することが可能になる。この研究の成果としては、特に、正表象のテープリッツ作用素の性質の詳細な研究がほぼ完成したことである。少し詳しく述べると、方程式の放物的なスケール不変性を利用して、作用素の有界性、コンパクト性、シャッテン族との関係の特徴づけが得られ、調和双対についての関係が明らかになった。

研究成果の概要(英文)：In this research, we studied parabolic operators, including the heat equation and the fractional Laplacian, by using potential theoretic and functional analytic methods. The mean value properties obtained by potential theory play important roles, which enables us to discuss spaces of solutions of parabolic equations in the functional analytic way. In fact, we showed that they admit the symmetric reproducing kernels, which are called parabolic Bergman kernels. As main results of this research, we characterized for the Toeplitz operator to be bounded, compact, and belonging to the Schatten classes by using some scaling invariant property of parabolic type. We also discussed the various notions of harmonic conjugates of parabolic type and clarified their relations.

研究分野：ポテンシャル論

キーワード：ポテンシャル論 熱方程式 分数ベキ作用素 ベルグマン空間 テープリッツ作用素 ブロッホ空間
シャッテン族作用素 調和双対

1. 研究開始当初の背景

ポテンシャル論は、リーマン面上の解析関数の存在に関して、ラプラス方程式のディリクレ境界値問題の解の存在一意性などの研究から進展してきた。

近年では、マルコフ過程など確率論との密接な関係からの寄与もあり、複素解析、確率論、リーマン幾何学、関数解析学などの分野が交錯する研究分野へと発展してきている。

そして、放物型方程式もラプラス方程式などの楕円型方程式同様ポテンシャル論的考察がきわめて有効な研究対象である。

現在、放物型方程式を関数解析的に取り扱う放物的ベルグマン空間が提唱され、その空間上の重要な作用素の性質が明らかにされつつある状況である。

2. 研究の目的

上記背景のもと、放物型方程式を解空間の構造と基底空間及び時間も含めた空間の幾何学的状況などとの関係を解の積分表示などポテンシャル論的手法を用いて詳細に解析し、さらに関数解析的考察を加えることが本研究の基本的な目的である。

本研究で取り扱う放物型方程式は、(1). 熱方程式、(2). 多重熱方程式、及び、(3). 分数冪のラプラシアンを含んだ微積分方程式である。以下、各対象に応じた研究目的を述べる。

(1). 熱方程式のマルチン境界：熱方程式に対しては、ポテンシャル論的な枠組みはほぼ完成しているといえる。本研究では、次のステップとしてこれをもとにマルチン境界と時空の幾何学的性質との関連を明らかにしていくことが目的である。分担者の下村勝孝の熱方程式を保つ変換の理論の研究を足掛かりにして、具体的な空間に対するマルチン境界を決定することが期待できる。

(2). 多重熱方程式と掃散空間：近年、多重熱方程式を掃散空間の枠組みで取り扱うことが可能になってきた。それをもとに正值優解の空間を詳しく調べ、平均値の性質のポテンシャル論的解釈を与えることが基本的な課題である。これに関しては楕円型の場合にもよい解釈は存在せず、何かきっかけを与えたいと考えている。

(3). 分数冪の放物型方程式と放物的ベルグマン空間：最後に、分数ベキの放物型方程式については、ベルグマン空間にヒントを得て、放物的ベルグマン空間を導入し、関数解析的な性質を調べ、解の性質を明らかにすることが目標である。この点が本研究課題において、最も大きな成果が期待できるところである。これに関して、最近得られたテープリッツ作用素や補間問題とも深くかかわるカルレソン測度に関する結果がをもとに作用素や補間問題を考察し、さらに深く掘り下げていき

たい。

それに関連して、最近、確率論的な方法により、分数ベキの楕円型方程式に対するハルナックの不等式が得られ、さらにマルチン境界などの考察がなされるようになってきている。そこで本研究では、分担者の竹内敦司の飛躍型確率過程の理論による研究の進展が期待された。

3. 研究の方法

(1) まず、予算の使用法についておおまかに述べる。数学においては、研究をすすめるためには他の研究者と研究連絡をすることが文献の精査とともに必要不可欠である。そのため本研究では大部分を旅費にあてた。また、備品予算は主に新規に出版された図書に使用された。

(2) 次に、研究目的であげた各研究対象に対するアプローチの方法について研究分担者連携研究者の役割分担とともに述べる。

熱方程式に対するマルチン境界決定のために下村勝孝が、熱方程式を保つ変換の理論の整備と新しい変換の発見を担当した。変換は調和写像と深く関係していることから、分担者の佐官謙一がリーマン面上で調和写像を擬等角写像との関係から特に2次元の理論を担当した。2次元は非常に特殊で、3次元以上の場合と比べてあまり解明が進んでいないところである。最後に、マルチン境界についての一般論については、正岡弘照が担当した。

多重熱方程式の研究は代表者の西尾昌治と分担者の下村勝孝の共同研究として進めた。具体的な成果は得られなかったもののブリットナーハンゼン等の掃散空間の研究が進み多重熱方程式は掃散空間とみなし得ることから、我々の得た平均値の性質と掃散空間として得られる平均値の性質には、何らかの関係を期待させる。

微積分方程式では、確率論の部分を竹内敦司が担当し、それを用いた平均値の定理の考察、ハルナックの不等式の構築には西尾昌治と鈴木紀明があたった。本研究の中心的課題である放物型ベルグマン空間の研究は連携研究者の山田雅博を加えて進められた。

4. 研究成果

上記研究の目的あるいは交付申請書でも述べているように、本研究における中心的研究対象は大まかに見て3つの柱からなっている。1つ目は、熱方程式のマルチン境界に関するもの、2つ目は、多重熱方程式に関する研究、そして、最後の3つ目は、放物型ベルグマン空間についてである。以下において、各テーマごとに研究成果を今後の課題とともに提示していきたい。

(1) 第一の熱方程式のマルチン境界に関しては、これまでその基礎となる熱方程式の解を保つ変換を分担者の下村勝孝が中心になり研究を進め、リーマン多様体上の変換を決定するに到り一応の区切りとなった。そこで、セミリーマン多様体へと話を進め、ラジアル計量に対する結果を分担者の下村勝孝がまとめ、論文として発表した。また、定常解の場合には新たな変換としてベートマン変換をとらえることに成功し、これまでよく知られていたケルビン型の変換との関係を調べた。この成果も論文として発表されている。今後、それらの結果をマルチン境界の研究に応用していくことが課題として残された。

(2) 次に第2の多重熱方程式については、論文として発表する成果は得られなかったが、情報収集を進め多重調和関数の場合にナビエ境界条件のグリーン関数に関する恒等式が最近プレプリントとして、発表されていることがわかり、熱方程式との関連が期待されるところである。また、多重方程式の分数冪版とも言えるものを新たに研究対象として取り上げることが今後のテーマとして浮上してきている。これに次の項目で得られた知見を加えることにより、新たな展開がなされるものと期待される。

(3) 最後に第3の放物型ベルグマン空間の研究では、テーマをコンジュゲートとテープリッツ作用素に絞って集中的に研究を進めた。コンジュゲートでは、指数が無限大の場合に対応するプロホ空間および形式的にはリース変換に対応する分数ベキ微分を用いた新たなコンジュゲートの概念を提案し、放物型ハーディ空間へと研究を進める準備が整いつつある。また、ベルグマン型空間との関連に関しても新しい展開がなされた。本研究で得られた基礎的な部分を論文として発表し、さらなる発展の礎とした。今後の進展に非常に期待が持てるところである。また、テープリッツ作用素に関しては、シャッテン族やランク有限といったコンパクト作用素との関連で大きな進展があった。新たに導入した放物的スケール変換およびそれを用いた合成積が重要な役割を果たした。結果は論文及び国内外の研究集会で発表された。今後、さらに進展することが期待される。

最後に、研究分担者、連携研究者による本研究の目的からは少し離れるものの本研究課題と密接に関連する研究成果にふれたい。

研究分担者の佐官は擬等角調和写像に関する歪曲定理について研究し、ハインツ型の不等式およびシュワルツ型の不等式を得た。

研究分担者の竹内はジャンプ型の確率過程について研究し、ジャンプ型の確率微分方程式に関する密度の漸近挙動を

明らかにした。

研究分担者の下村はベートマン変換を波動方程式の研究に応用し、関連したリウヴィユ型定理を定式化した。

連携研究者の鈴木はポテンシャル論に基づいた多項式近似理論を展開し、有限次数整関数に対する指数的な重みに関する多項式近似を考察した。

連携研究者の正岡は調和空間上のマルチン境界を考察し、オーリッツ型のハーディ空間の有限次元性に関する特徴付けを得た。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 29 件)

HISHIKAWA, Yosuke, NISHIO, Masaharu, YAMADA, Masahiro, $L(a)$ -conjugates on parabolic Bergman spaces, *Potential Analysis*, 40 (2014), 525-537. 査読有 DOI:10.1007/ s11118- 013- 9358- 5

HISHIKAWA, Yosuke, NISHIO, Masaharu, YAMADA, Masahiro, Fractional calculus on parabolic Hardy spaces, *Scientiae Mathematicae Japonicae*, 77 (2014), 371-391. 査読有

PARTYKA, Dariusz, SAKAN, Ken-ichi, Quasiconformal and Lipschitz harmonic mappings of the unit disk onto bounded convex domains, *Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ Mathematica*, 39 (2014), 811-830. 査読有 DOI:10.5186/ aasfm.2014.3940

MURATA, Minoru, SUZUKI, Noriaki, A parabolic approach to Martin boundaries for elliptic equations in skew product form, *Potential Analysis*, 40 (2014), 279-305. 査読有

KITAGAWA, Akihiro, TAKEUCHI Atsushi, Asymptotic behavior of densities for stochastic functional differential equations, *International Journal of Stochastic Analysis*, 2013 (2013), Art.ID 537023, 17 pp. 査読有 DOI: 10.1155/ 2013/ 537023

NISHIO, Masaharu, SUZUKI, Noriaki, YAMADA, Masahiro, Positive Toeplitz operators of finite rank on the parabolic Bergman spaces, *Kodai Mathematical Journal*, 36 (2013), 38-49. 査読有

HISHIKAWA, Yosuke, NISHIO, Masaharu, YAMADA, Masahiro, Conjugate functions on spaces of parabolic Bloch type, Journal Mathematical Society Japan, 65 (2013), 487-520. 査読有

NISHIO, Masaharu, SUZUKI, Noriaki, YAMADA, Masahiro, Schatten class Toeplitz operators on the parabolic Bergman space II, Kodai Mathematical Journal, 35 (2012), 52-77. 査読有

MASAOKA, Hiroaki, NAKAI, Mitsuru, Square means versus Dirichlet integrals for harmonic functions on Riemann surfaces, Tohoku Mathematical Journal, 64 (2012), 233-259. 査読有

SHIMOMURA, Katsunori, Caloric morphisms between different radial metrics on semi- euclidean spaces of same dimension, Mathematical Journal Ibaraki University, 43(2011), 13-41. 査読有

[学会発表](計 66 件)

田中 清喜, 西尾 昌治, 調和ベルグマン核の境界挙動、日本数学会年会、2015 年 3 月 21 日 ~ 3 月 24 日、明治大学 (東京都・千代田区)

佐官 謙一、On quasiconformality and some properties of harmonic mappings in the unit disk (joint work with Dariusz Partyka)、「リーマン面・不連続群論」研究集会(招待講演)、2015 年 2 月 14 日 ~ 2 月 16 日、大阪大学中之島センター (大阪府・大阪市北区)

竹内 敦司、ジャンプ型確率過程に対する部分積分公式、日本数学会秋季総合分科会(招待講演)、2014 年 9 月 25 日 ~ 9 月 28 日、広島大学 (広島県・東広島市)

佐官 謙一、Heinz type inequalities for Poisson integrals (joint work with Dariusz Partyka)、等角写像論・値分布論研究集会(招待講演)、2014 年 1 月 10 日 ~ 1 月 11 日、法政大学(東京都千代田区)

菱川 洋介, 西尾 昌治, 山田 雅博、放物型ハーディ空間とエリア関数、ポテンシャル論研究集会、2013 年 8 月 28 日 ~ 8 月 30 日、北海道大学(北海道札幌市)

TAKEUCHI, Atsushi, Asymptotic behavior of densities for stochastic

functional differential equations, 36th Conference on Stochastic Processes and their Applications, 2013 年 7 月 29 日 ~ 8 月 02 日、ボルダー (アメリカ)

NISHIO, Masaharu, Toeplitz operators on parabolic Bergman spaces, Nicu Boboc La 80 de Ani Conferinta Omagiala(招待講演)、2013 年 4 月 16 日 ~ 4 月 16 日、ブカレスト (ルーマニア)

NISHIO, Masaharu, Toeplitz operators on parabolic Bergman spaces, International Workshop on Potential Theory, Sapporo, 2013, 2013 年 2 月 4 日 ~ 2 月 4 日、北海道大学(北海道札幌市)

菱川 洋介, 西尾 昌治, 山田 雅博、Fractional calculi on parabolic Hardy spaces, 第 21 回関数空間セミナー、2012 年 12 月 24 日 ~ 12 月 26 日、東京理科大学(東京都新宿区)

TAKEUCHI, Atsushi, Positivity of densities for stochastic differential equations driven by gamma processes, 8th World Congress in Probability and Stochastics, 2012 年 7 月 11 日 ~ 7 月 11 日、イスタンブール (トルコ)

SAKAN, Ken-ichi, The Schwarz type inequalities for plane harmonic mappings in the unit disk, Quasiconformal Mappings and Complex Dynamical Systems, 2012 年 7 月 3 日 ~ 7 月 4 日、クラクフ (ポーランド)

西尾 昌治, 鈴木 紀明, 山田 雅博、放物型ベルグマン空間上のランク有限正定値 Toeplitz 作用素について、ポテンシャル論研究集会、2011 年 11 月 3 日 ~ 11 月 5 日、岐阜大学(岐阜県岐阜市)

西尾 昌治、アッペル変換の一般化について、第 54 回函数論 シンポジウム(招待講演)、2011 年 10 月 8 日 ~ 10 月 10 日、千葉大学 (千葉県千葉市)

菱川 洋介, 西尾 昌治, 山田 雅博、La-conjugates on parabolic Bergman spaces, 日本数学会度秋期総合分科会、2011 年 9 月 30 日、信州大学(長野県松本市)

西尾 昌治, 鈴木 紀明, 山田 雅博、Positive Toeplitz operators of finite rank on the parabolic Bergman spaces, 日本数学会度秋期総合分科会、2011 年 9

月 30 日, 信州大学(長野県松本市)

6 . 研究組織

(1)研究代表者

西尾 昌治 (NISHIO, Masaharu)
大阪市立大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号 : 90228156

(2)研究分担者

佐官 謙一 (SAKAN, Ken-ichi)
大阪市立大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号 : 70110856

竹内 敦司 (TAKEUCHI, Atsushi)
大阪市立大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号 : 30336755

下村 勝孝 (SHIMOMURA, Katsunori)
茨城大学・理学部・教授
研究者番号 : 00201559

(3)連携研究者

鈴木 紀明 (SUZUKI, Noriaki)
名城大学・理工学部・教授
研究者番号 : 50154563

山田 雅博 (YAMADA, Masahiro)
岐阜大学・教育学部・准教授
研究者番号 : 00263666

正岡 弘照 (MASAOKA, Hiroaki)
京都産業大学・理学部・教授
研究者番号 : 30219315