様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２６ 年　 ６ 月 １５ 日現在

機関番号：１０１０１
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2011～2013
課題番号：２３５４０２２９
研究課題名（和文）Ｃスター環上の流れの準対角性と内部近似性

研究課題名（英文）Quasi-diagonality and approximate innerness of flows on C*-algebras

研究代表者
岸本　晶孝（Kishimoto, Akitaka）

北海道大学・-・名誉教授

研究者番号：００１２８５９７

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　2,900,000円、（間接経費）　870,000円

研究成果の概要（和文）：フォンノイマンは量子力学の数学的基礎づけにヒルベルト空間上の作用素の理論をあて、その展開と解釈を発表した。その後、おそらく無限自由度の量子力学を想定して、いわゆる作用素環の理論を始めたといわれるが、その物理学への応用には言及しなかった。これは、第二次大戦終結前後において、ゲリファント・ナイマルクとシーゲルによってCスター環の理論が形式化され物理学の枠組みとしての正当性が主張されることによって、結実した。この研究はこの考えに沿って、時間発展としてのCスター環上の流れを研究するものである。そのなかでも量子物理学モデルにあらわれるものと想定される内部近似的なもの、それより広い準対角的なものを調べた。

研究成果の概要（英文）：von Neumann successfully placed the theory of operators on Hilbert space in the foundation of quantum mechanics. He later developed the theory of operator rings (or algebras), probably thought of as a foundation of quantum mechanics of infinite degree of freedom such as quantum field theory, but he never completed that project by being distracted by other callings. Around the ending of WWII Gel'fand, Naimark and Segal initiated the theory of C*-algebras and asserted it was the scheme we were after as a framework of quantum physics of infinite degrees of freedom. This project was built up on this claim and was to investigate flows on C*-algebras as appearing as time-developments. We established many properties of approximately inner flows which were supposed to appear in physical models, and quas-diagonal flows, which include the formers and look more amenable.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・解析学基礎

キーワード：作用素環　Cスター環　流れ　内部近似性　準対角性

１．研究開始当初の背景

フォンノイマンは１９３２年ヒルベルト空間上の作用素の理論を量子力学の基礎に据える理論を上梓した。この基礎付けは現在に至るまで大方の物理学者によって支持され、それに基づいて研究がなされているが、フォンノイマン自身はこれには飽き足らず無限自由度の物理系を数学的に捉えるために、作用素環の理論を創始した。（これが現在フォンノイマン環といわれる環の研究の重要な嚆矢である。）しかし、量子物理学との関連については明確に言及するまえに興味が変わってしまったようである。第二次大戦終結前後において、ソ連とアメリカにおいて、ゲリファント、ナイマルクとシーゲルが量子物理学の基礎付けとして、観測量、対称性、状態などの概念の数学的定式化として、C スター環の理論を樹立した。量子場などの無限自由度の系を考える場合は、従来のヒルベルト空間に基づく理論はそのひとつの表現を考えるに過ぎないという考えに基づき、多様な表現を許容するという観点から数学の他の分野への応用ももつ。その後多くの数理物理学者がこの分野に参加してその物理学での意味合いが確立されるとともに、C スター環は数学の一対象として発展を遂げてきた。

対称性の一種としての時間発展を記述すると思われる C スター環上の流れに関しては、一様連続な場合の研究が終わりに近づいた後、積極的に研究が行われるようになったが、１９８０年ごろにある程度の結果が出つくしてから停滞しているように思われる。その当時に、Bratteli と Robinson による量子統計力学の数学的基礎付けともいうべき教科書が出版され、のちに境によるやや専門的な流れの生成作用素や非有界微分に関する本も出版された。力点は、微分と流れとの関係と、平衡状態の一般論に置かれていて、関数解析的観点からは結果は出尽くしたと思われるが、必ずしも C スター環特有の結果が十分開拓されたとは言い難い。前者の問題を今振り返れば、微分と流れ（その積分可能性）の関係など当初予想したような結果は、その抽象性の程度から判定して、時期尚早との感がある。後者の一般論は、富田竹崎理論の成功もあってとりまとめられたが、相転移の問題については、１次元系の場合を除き、なんらめぼしい結果は得られなかった。

２．研究の目的

申請者は、C スター環が定義されたころの動機に戻り、C スター環とその自己同型などを物理学の観点から眺めてみたいという意識を常にもっていた。とくに、物理学モデルにあらわれる時間発展の特徴を捉えた、C スター環上の流れを研究することを目的としたいと思うようになった。

非有界微分がいつ流れを生成するかという問題は１９８０年ごろまで盛んに考えられたが、それがはかばかしい結果をもたらさなかったことを鑑み、この問題を棚上げすることにしたが、理由のひとつはそれでも流れに関する問題は尽きないことに気付いたからである。特に平衡状態（数学的に重要な帰結をもつ KMS 状態）など物理学に直接関係するような流れに限るとなおのことそうであり、一般に物理学者がそうだと考えていたことでも必ずしも数学的に明確に示されていないことが多い。また以前に考えた個々の自己同型の理論と流れの理論とは大いに違っているが、その違いを数学的に明確にすることには意義があるように思われる。

具体的には、古典系に対応すると思われている AF 環上の AF 流れから、一般の準対角的 C スター環上の準対角流れまでを対象としてその性質を調べることにしたが、そのような流れの一般の流れの中での位置づけを確認するようなことも対象とした。

３．研究の方法

物理モデルより発した具体的な例（UHF 環、AF 環での流れ）を考えるとともに、関数解析的手法を用い、C スター環に関する抽象論を援用して、物理モデルに現れるような流れの理解を深める。

４．研究成果

C スター環上の流れの摂動共役類の分類は、結局その流れによる接合積 C スター環とその上の双対流れの同型類の分類に帰着する（竹崎・高井の双対性により）。この操作により、もとの流れの情報の多くが接合積として現れる C スター環の性質に反映すると思われる。（双対流れは幾分類型的になるように思われる。）最初の結果は、流れに対する緩やかな条件のもと、接合積 C スター環上のトレース全体は、もとの流れの平衡状態（KMS 状態）全体と対応していることを明らかにした。それまでの申請者の結果とあわせて、少なくとも接合積上の双対流れの一般的様子が明確になったと考える。（正確には、KMS 状態が何らかの操作のあと接合積上の下半連続トレースを与えることは富田・竹崎の結果から得られる。この逆は、流れが自明のときなど一般には正しくなく、条件が必要となる。正確には、下半連続トレースで因子的なものに対して、この条件が満たされ

ているときは、もとの流れに対する、ある温度でのKMS汎関数が対応することが分かる。）C スター環の分類でいままで使われている情報は、イデアル構造、トレースの構造、K 理論などの代数的情報であるが、今考えているような接合積に関してはこのような情報が得られたことになる。（ただし代数的情報に流れを識別するようなものはない。イデアル構造が「簡単」であるための条件については以前に結果を出した。）ただし C スター環の分類論は目下イデアル構造が離散的で有限である場合に限られており、今考えている接合積では連続的なので、完全な分類にはほど遠い。さらに接合積の分類が出来たとしても、双対流れの分類の問題も残っている。

UHF 環上に UHF 流れというごく簡単明瞭な仕組みの流れがある。これは行列環上の流れの無限テンソル積のことで、従って、行列環上の流れの同型類はスペクトルで完全に指定されるので、スペクトルの無限列がその情報をすべて含んでいることになる。（これについては同型類の分類理論はすでに存在する。）しかし摂動共役類の分類のためには、この中から「本質的部分」を抽出しなければならない。以前からこの問題を考えているがいまだ満足のゆく結果がない。以前 UHF 環が無限型のときに普遍的 UHF 流れという概念を定義した。そのような C スター環は自分自身とのテンソル積が自分と同型なので、「どんな UHF 流れも吸収する」という概念が定義でき、そうであるような流れのことを普遍的流れという。２の無限乗の場合には、２次行列の無限テンソル積としての UHF 流れは、結局実数の無限列で指定される（２点集合の無限列であるがひとつは０と指定できる）。このとき、その数列が０に収束し、その２乗和が発散するとき、その UHF 流れは普遍的である。この結果を２以外の一般の場合にも拡張した。上に述べたスペクトルの無限列（言いかえれば実数の有限集合の無限列）の言葉を使えば、実際に問題となるのはいわばそれらの無限和のこと、正確には有限個までの和の分布状況の漸近的ふるまいである。分布の両端を除く中程での分布はほぼ一様になるはずで大した困難は生じないが、上限、下限での分布は微妙である。これから得られた知見は、一般のスペクトル理論では、ただ最終的分布の稠密さだけをみているが、摂動共役類の分類で要求されるのは、分布の密度に関する局所的知識である。上限、下限近くでの分布密度は微妙であって、摂動共役性に大いに影響する。

申請者は昔 C スター環上の可換群の作用に関して、強コンヌスペクトルなるものを定義した。その以前に既にコンヌスペクトルなるものは定義されていて、これがその作用による接合積がプライムなることの特徴づけに用いられていた。（Olesen と Pedersen による。別の状況でコンヌスペクトルを導入したのは Connes であるが、彼の考えたフォンノイマン環の場合には１種のコンヌスペクトルだけが現れる。）それに対して、強コンヌスペクトルはその作用による接合積が単純になることの特徴づけに用いられる。（正確には、強コンヌスペクトルは実数群の閉半群として定義され、接合積が単純になるのは、C スター環の流れ不変なイデアルは０または全体、かつ強コンヌスペクトルが実数全体であること。）群が連続の場合に接合積が単純になるのは特殊な場合に限られることが知られていたので、強コンヌスペクトルが自明でない場合には計算は簡単ではなく、スペクトルの情報だけでなく、スペクトル空間そのものの情報も必要とする。平衡状態に関連した物理モデルではこれは自明、ゼロになる。

流れに対して、スペクトルが０以上である要素をすべて集めると、閉部分環になることが知られていて、これを解析的部分環という。（これは複素平面上の単位円内の解析関数、または上半平面の解析関数の環の類似として導入された言葉である。）この解析的部分環が、古典的な場合の連続関数環内での解析関数環との類似から、いつ極大になるかというのは昔からの問題であった。C スター環が単純の場合（もっと一般的にはその作用で不変なイデアルが、０か全体しかない場合）、解析的部分環が極大になる必要かつ十分条件は強コンヌスペクトルが実数全体であることを示した。古典的な結果の類似が成り立つことを示したわけである。（一般の場合には、そのような流れの、自明な流れによる拡張であることも示した。）この問題をもう少し一般化して「実質的に極大」という概念を定義して、これを解くべく努めたが部分的な結果しか得られなかった。

ヒルベルト空間上の有界作用素が準対角的であるとは、有限階数の射影の増大列で、１に収束し、その作用素との交換子のノルムが０に収束するようなものの存在することである。自己随伴作用素はワイル・フォンノイマンの定理より準対角的であることが分かる。また非有界作用素に対しても適切にこの定義を拡張すれば、非有界な自己随伴作用素もこの性質をもつことが分かる。この定義はまた作用素の集合に対しても定義で

きる。一般のCスター環に対しては、ある忠実なヒルベルト空間上の作用素としての表現で、その表現で得られる作用素全体が準対角的であれば、(Cスター環として）準対角的であるとして定義する。このとき、よく使われる結果は Voicurescu による有名な定理で、それを用いると、コンパクト作用素で割ってもなお忠実な表現であればどれをとっても、その行き先は準対角的になる。

Cスター環の他に流れも考えるとは、さらに自己随伴作用素をも考えることに相当する。

ヒルベルト空間上の作用素によるCスター環と、自己随伴作用素によって生成されるユニタリ群でアジョイント作用によりそのCスター環上に強作用するものがあるとする。このとき、有限階数射影の増大列で１に収束し、そのCスター環の要素や自己随伴作用素と漸近的に交換するものが存在することとして準対角性が定義される。抽象的なCスター環上の流れに対しては上記の条件を満たす忠実な共変表現が存在するとき、これを準対角的であるという。自己随伴作用素が非有界の場合のみ、今までとは本質的に異なった定義となる。（この定義は一般のリー群に対しても適用できる。）

準対角的流れには抽象的特徴づけがある。行列環上の流れへの完全正な写像の列で、漸近的に忠実なものが存在するということ。（その完全正な写像は、Cスター環上の流れと、行列環上の流れを漸近的に仲立ちする。）

似たような概念として MF 流れがある（MF は行列的有限性というようなことを意味する英語の頭文字らしい。）準対角的流れの自明な典型例は行列環上の流れである。行列環上の流れの無限列に対して、その無限直積をとる。漸近的に０になる要素全体はイデアルをなし、それで割ることで C スター環が得られる。何らかの無限列に対して、そうして得られたCスター環のなかに埋め込めるような可分 C スター環上の流れを MF 流れという。（行列環上の流れというところを、実数体上の２乗可積分関数のヒルベルト空間に作用するコンパクト作用素環とその上のずらしによる流れと言い換えてもよい。これが最も典型的な準対角的流れであり、MF 流れとは、その無限直積をとってイデアルで割ることよって得られる「普遍的準対角流れ」に埋め込まれるようなもののことである。この普遍的流れのCスター環は非可分なのでそれ自身はMF流れの定義に合わない。）

準対角的流れを MF 流れの定義に沿って特徴づけると、準対角的流れは、それより、コンパクト作用素環上のずらしによる流れの無限直積への完全正写像が存在し、イデアルによる商をとることにより代数的同型になることということが出来る。いいかえると、「普遍的流れ」への埋め込みが完全正写像の持ち上げを持つ場合が準対角的である。（従ってもとの C スター環が核型であれば、MF 流れは準対角的である。）一般的には線形写像への持ち上げの存在しか言えない。

このような特徴づけから準対角的流れ、MF 流れを、何らかの意味で有限次元流れの極限として表すことができる。もし、このような極限系に使われる写像が代数的準同型であれば既に馴染みの極限系であり、これは AF 流れを定義する。（環自身も AF 環と言い、特殊なものである。）その写像が完全正であれば、流れは準対角的であり、ただの線形写像であれば、MF 流れである。（後の二つの場合は極限が実際にCスター環上の流れを定義するために他に幾つかの条件を課されなければならない。）以上のことより、AF 流れ、準対角流れ、MF 流れがこの順に一般的になり、いずれも何らかの有限次元近似可能性を表しているといえる。（後二者は、流れを考えない場合に、Blackadar と Kirchberg によって考察された。）証明には一般のバナッハ空間上での有限階数の射影で強いノルム評価をみたすものの存在（Pisier による）を使う必要があり、C スター環だけに対する MF 性とは異なっている。

MF 流れに対して、双対 MF 流れの概念も定義した。もし流れによる接合積とその上の双対流れが MF 双対流れであればもとの流れは MF 流れであり、その逆も成り立つ。MF 双対流れは、MF 流れとまったく同様に定義される。ただし基本になる流れは、コンパクト作用素に値をとる実数体上の無限遠０の連続関数の環上に定義された、関数を只ずらすというという流れである。

C スター環に対して完全という概念がある。最近、C スター環が完全でかつ準対角的であればその任意な忠実な表現上で、有限次元Cスター環で近似できるという定理が得られた（Dadarlat と Brown)。正確にはそのCスター環の勝手な有限個の元に対して、任意に指定した正確さで、表現空間上でのある有限次元Cスター環の元で近似できる、というものである。この結果を流れの場合にも拡張した。たとえば完全単純Cスター環上の流れが準対角的であったとし、任意の共変表現をとってくる。C スター環の勝手な有限個の元に対して、表現空間上の有限次元Cスター環とそのうえに流れを定義するユニタリ群をうまく選べば、先に選んだ有限個の元はその有限次元Cス

ター環の元で近似でき、その共変表現のユニタリ群は新たに選んだユニタリ群で、生成作用素同士のノルムさが小さいという意味で近似できる。(正確には流れにわずかの摂動を認めなければならない。) AF 流れは、有限次元流れで内側から近似できることを要求するが、一般の準対角的流れは(C スター環が完全であれば)表現空間での有限次元流れで近似できる。これらはもちろん準対角性の必要十分条件でもあり、またCスター環が単純でない場合(I 型のイデアルを含む場合)にもしかるべき形の結果が得られている。

内部近似可能な流れ(内部的流れの極限で書けるもの)との対比に関してはあまり進展がなかった。ただし、準対角的流れ、MF 流れはある種の「連続性」があり、確かめることが容易であることが多い。流れが内部近似可能であることを確かめるにはいちいち定義に戻る必要がある。しかし逆に、内部近似可能な流れは定義にしたがって構成可能であるが、準対角的流れ、MF 流れは定義にしたがって構成することが出来ない(少なくとも C スター環が指定されている場合は簡単に出来そうにない)。

５．主な発表論文等
(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計 6 件)

① A. Kishimoto, Quasi-diagonal flows, III, J. Functional Analysis 査読有, 264 (2013), 551--569.
② A. Kishimoto, Maximality of the analytic subalgebras of C*-algebras with flows, J. Korean Math. Soc. 査読有, 50 (2013), 1333-1348.
③ A. Kishimoto, Quasi-diagonal flows, II, Math. Scand. 査読有, 111 (2012), 261--295.
④ A. Kishimoto, UHF flows and cocycles, International J. Math. 査読有, 23 (2012), 1250018 (20 pages).
⑤ A. Kishimoto, C*-crossed products by ${¥bf R}$, III, Acta Math. Sinica, English series, 査読有, 27 (2011), 1259--1282.
⑥ A. Kishimoto and D.W. Robinson, Quasi-diagonal flows, J. Operator Theory, 査読有, 66 (2011), 353--384.

〔学会発表〕(計 2 件)

① A. Kishimoto, Approximately inner flows, quasi-diagonal flows, and MF flows, Classifying structures for operator algebras and dynamical systems (organized by Gwion Evans et al), University of Aberystwyth, Wales, September 16-20, 2013.
② A. Kishimoto, On amenable flows on C*-algebras, Conference on C*-algebras and related topics (organized by Y. Kawahigashi), RIMS, Kyoto University, September 5-9, 2011.

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕
○出願状況(計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況(計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織
(1)研究代表者
岸本 晶孝 (KISHIMOTO, Akitaka)
北海道大学 名誉教授
研究者番号：00128597

(2)研究分担者
( )

研究者番号：

(3)連携研究者
( )

研究者番号：