様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２６ 年　 ６ 月 １８ 日現在

機関番号：１２６１１
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2011～2013
課題番号：２３５４０２３６
研究課題名（和文）１変数ベキ級数の関係式と空間曲線の反復積分によるコーディング

研究課題名（英文）Relations of formal power series of one variable and coding of space curves by iterated path integrals

研究代表者
中居　功（NAKAI, Isao）

お茶の水女子大学・大学院人間文化創成科学研究科・教授

研究者番号：９０２０７７０４

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　3,900,000円、（間接経費）　1,170,000円

研究成果の概要（和文）：２文字X、Yとそれらの逆元となる文字からなる語全体は語の結合を積とすることで代数学における群の構造を持つ。この群の元はXY平面の整数格子点で折れまがる折れ線を定める。平面曲線はこのような折れ線の、一般化した対象、つまり一般化されたX、Yの語と捉えられる。この観点から平面曲線全体の群としての構造を研究し、曲線のX、Yの語としての展開、また曲線の形式的対数を、自由リー環の元として考察し、部分的結果をえた。

研究成果の概要（英文）：The words consisting of two letters X,Y and their inverses constitute a group structure in algebra, where the concatenation of words is the product. An element of this group defines a polygonal path with vertices on the integral lattice. Plane curves are regarded as generalization of such linear paths, hence words of X,Y. From this point of view, the group of plane curves are investigated, especially curves are presented as generalized words of X,Y and the logarithms of those curves are investigated as elements of the free algebra generated by X,Y, and some results are obtained.

研究分野：数理系科学

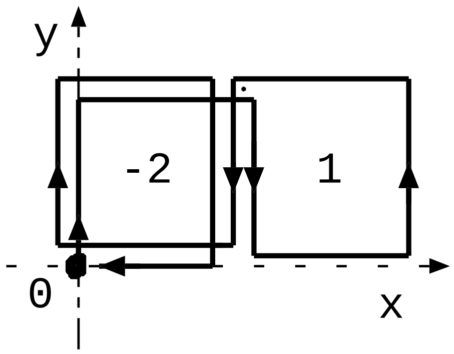
科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：力学系　関係式　センター問題　WEB幾何学

１．研究開始当初の背景

１変数常微分方程式は、１次元ベクトル場の芽なすリー環の中のパスである。ピカールの反復法はこのパスの形状から方程式の解を記述できることを示唆している。

次のダイアグラム＝平面のパスを考察する。（図中の数は巻き付き数）



これは横軸をベクトル場 X、縦軸をベクトル場 Y に見立てる事でベクトル場のリー環に埋め込まれる。また水平方向の長さ１の線分に X の時間−１−写像を f、水平方向の長さ１の線分には Y の時間−１−写像を g とすれば、この曲線には、積分写像即ち常微分方程式のホロノミーが、即ち f、g とその逆元の語が対応することになる。問題はこのダイアグラムがどのような形状であれば、またリー環にどのように埋め込まれていれば関係式（即ち曲線を一周したときの積分またはホロノミーが恒等写像となる）が成り立つか判定する事である。一般にこの図式は閉とも滑らかとも限らないパスである。このように、関係式のセンター問題としての解釈は代表者の論文
Nakai,Yanai,Relations of formal diffeo morphisms,RIMS Koukyuuroku 1447 (2005)(発表 2003 年)により（おそらく）初めて提案され、関係式を満たす形式ベキ級数の組が得られた。また先行する研究
Ecalle,Vallet,Intertwined mappings,Ann. Fac. Sci.Toulouse Math.(6)13(2004)では全く別の方法で形式ベキ級数の関係式が得られており、その収束性が主張されている。

上述の様にこの問題は、パスの形状の幾何学とパスのリー環への埋め込み方の二つに分解する。第一の問題は Chen に遡る。一般にダイアグラムをベクトル空間 V のパスとし、１次元ベクトル場のリー環を V の生成する自由リー環におきかえ同様に考察をする事ができる。この場合、曲線に沿った積分は V のテンソル代数の閉包に値を取り、論文 Hambly and Lyons,Uniqueness for the signature of a path of bounded variation and continuous analogues for the free group, Ann Math.171,1(2010) により Signature とよばれるものと等しい。その論文の結果によると有界変動なパスは“行って戻る（フラクタル）樹木”部分を無視すれば Signature が一意に決定する。Signature 全体の成す群の位相的閉包は V の生成する自由リー環をリー環にもつ群(Brudnyi, Formal paths, iterated integrals and the center problem for ordinary differential equations.Bull.Sci.math.132(2008)) の有界変動な道全体の群のフラクタル樹木の群による商群のある極限と同形である。換言すれば Singature の対数(マグナス展開)は自由リー環に値を取り、また任意のパスは自由リー環に値をとる微分方程式の解である。

V をベクトル場のリー環に埋め込めば全てがベクトル場の言葉になる。この操作を経て Signature の中の係数から方程式そしてその解（積分）が原理的に求まる。代表者はこのアイディアで,冒頭の関係式の問題を、☆Relations of formal diffeomorphisms and the center problem, I. Nakai, K. Yanai Moscow Mathematical Journal, 10, 2(2010) で、Signature のベクトル場のリー環に値をとる対数（マグナス展開）の計算結果から，“道＝ダイアグラム”の幾何学的モーメントの条件より “Log=0”を解き形式ベキ級数の関係式を求めている。

上のダイアグラムは、平面上の巻き付き数ρ(関数である)を定める：ρ={ρ_{i,j}} は(i,j)の番地の巻き付き数とする。ρを重みとする平面の統計的高次モーメントが我々のモーメントである。これは開いている（閉じていない）語のダイアグラムにも定義され、２元生成自由群の第二交換群による商の元と対応する。さて、モーメントが全て消えていればセンター条件が成り立つだろう。このような楽観的予想は、Hilbert 第１６問題、あるいは Poincare センター問題の研究者に共有されつつある。実際、Yomdin et al, Center condition at infinity for Abel differential equations,Ann. Math. Vol 172, No3 (2010)は、解析的常微分方程式のセンター条件は、Abel 型の方程式については、パス（(p(x),q(x))の積分曲線）が ”何も囲まないで行って戻ることである“を示し、Brudnyi はそれを一般化した。また Brudnyi、Free Subgroup of the group of formal power series, C.R.Math.Canada (2009)では、‘センター条件は壊れやすい’こと即ち、形式同形の有限生成部分群は‘殆ど自由である’ことを示している。これら一連の結果によりセンター問題の解はある程度理解できた。しかし、群論的には第二交換子群の元の定める関係式が常に成り立つことは全くのあやまりである。では何故、解析的方程式に限って、センター条件はモーメントで決まり、第二交換子群に相当する情報と無関係なのだろうか。これを合理的に説明するものは現在みあたらない。

平面曲線の Green-Stokes 定理は有界変動な場合に（自己交差を許して）証明されたのは２１世紀に入ってからである(例 Carmona,Cufi,Rend.Circ.Mat.Palermo(2)53 (2004)). また確率論の先駆的研究

P.Levy,C.R.Acad.Sci.230(1950)では、ランダムパスの端点を結んでできるレビエリアの面積の統計が予言され、現在までに実に多くの証明が与えられている。レビエリアは、Green-Stokes 定理によると、上の Signature の第二次の係数と同等である。面積より高次の項（例えば１次のモーメント）の統計は全くの未知であると思われる。それらを少しでも解明する事が、ランダムな微分方程式の積分の我々の観点からの解明に重要である。例えば上の Abel 方程式の（p(x)、q(x)）の積分平面曲線がランダムな格子折れ線を描くとき、つまり二つの写像（力学系）のランダムな合成を考えたとき、我々はその合成写像の力学についてどれだけの事が言えるだろうか。このためにもランダムな格子折れ線のモーメントの統計を調べることが重要となる。

２．研究の目的

（１）本課題では、パスの図形的形状からどのように解の定めるホロノミー写像が決まるかを、論文☆ で得られている結果をさらに Fomenko による Campbell- Baker-Hausdorff 型の公式を精査することにより明らかにする。特にホロノミーが自明（＝恒等写像）である条件（センター条件）をパスの幾何学を用いて解く。

（２）前項目１の中で述べられた折れ線パスのセンター問題の解から得られる関係式を満たす一変数形式ベキ級数の組の収束性を示す。閉じたパスのまた巻き付き数が XY 平面上で恒等的に０である場合には signature の別の情報からセンター問題を考察する。これらの解明にむけて、平面曲線の signature の研究をする。

（３）より基本的である、平面の有界変動曲線にたいし Green-Stokes の定理の成り立つような理論の自然な拡張を探り、この曲線幾何学の本質を探る。

（４）複素葉層、常微分方程式の幾何学に関連する応用を探る。

３．研究の方法

現在までに得られている非自明な関係式を持つ１変数形式同形の収束性を考察した。ポアンカレタイプの関係式については繰り込みの方法での証明予想の実現を目指した。収束発散の真実を見極めるために、テイラー展開の計算機実験を行った。

（１）理論的考察：連携研究者、柳井佳奈との共同研究で既に得られている様々な関係式をみたす形式同形の収束性を示すことを試みた。この問題では、ベキ級数の組（f、g）の線形項と図式からもとめられる、所謂 small denominator が現れる。証明の第一段階とし、そのようなジーゲルタイプの問題を避け、緩やかな増大度の係数の現れるポアンカレータイプについて考察した。

収束性の証明について代表者のアイディアを手短に述べれば、関係式を持つ形式同形の収束のためのくり込みの一種である。形式ベキ級数の線形項のレゾナンスのない条件のもとでの正当化をめざした。

また、複素力学系の観点から WEB 幾何学の曲率に関する研究を行った。

（２）計算機の活用：計算機実験のため、１２CPU（２４計算コア）、３台の計算専用 GPU の搭載された Linux 機に計算ソフトウェア Mathematica を乗せた。この計算機環境で以下の計算機実験をおこなった。

①平面曲線のモーメント、シグネチャーの幾何学的実験、ランダムウォークの計算機実験のために利用した。平面の酔歩の signature の統計的性質を発見するために GPU による超並列計算実験を試みた。これらより、small denominator の問題に関する手がかりを探った。

②上の収束性の考察において、計算機により関係式を持つ１変数形式同形のテイラー係数を具体的に求め、収束性の証明を試みた。また形式ベキ級数の合成の問題に関する計算機実験をした。これらのために、効率的な計算機実験のために並列計算の環境を整え、Mathematica による計算プログラムを作成した。

（３）研究発表および共同研究：
以下に主要な研究討論について記す。

① 研究課題に関連する２０１１年８月、メキシコ、グアナファとで開かれた国際研究集会に参加し、情報収集をした。

② ２０１１年９月スペイン、トルデシアスで開かれた特異点論の国際会議に出席し、研究発表をおこない、情報収集をした。

③２０１１年１１月、フランス,レンヌ大学を訪問し Loray,Cerveau 氏ら研究討論した。

④ 旧知の WEB 幾何学の研究者である Alain Henaut 氏と研究討論をした。（２０１２、６月）

⑤ ２０１３年３月には Weitzmann 研究所に Novikov 教授との共同研究のため招待訪問した。またその機会に、Yakovenko 氏、Yomdin 氏と研究討論をした。

⑥ 京都大学および関西地区で開かれる研究集会に参加し、関西地区の研究者と研究連絡、情報収集を行う。また Weitzmann 研究所

より Yomdin 氏の来日の機会に研究集会に参加し、本研究課題について討論した。

⑦２０１４年３月には、Weitzmann 研究所より Novikov 教授を本研究費により招聘し、曲線群と反復線積分、および WEB 幾何学の曲率の問題について討論した。

４．研究成果

（１）２元生成の自由群の可換化のケーリーグラフは平面の整数格子を頂点集合とするグリッド格子である。また自由群の元はこのケーリーグラフの中の折れ線（ケーリー図式）を定める。平面曲線はこのような折れ線の一般化あるいは極限とみなせる。この観点から平面曲線ななす群の構造を研究し、２元生成自由群のホール基底による曲線の展開、また生成元の形式的対数の生成する自由リー環に値をとる平面曲線の対数の曲線に沿った反復線積分による展開についていくつかの結果を得た。この自由リー環は２つの生成元の高次にネストしたリー括弧積により実数上生成されることが知られているが、その括弧構造を交換子に置き換え、リー環の生成元をそれらの指数、即ち自由群の生成元に戻せばホール基底となる。しかしながらホール基底の対数は対応するリー括弧積のみならず、他の括弧構造を持つ多くの基底の線形結合となることが実験的に明らかになった。線形結合の各係数はカンベル・ハウスドルフ型の公式により、ホール基底の描くケーリー図式にそっての反復線積分で得られる。この部分の数学的背景を明らかにする為に、ホール基底＝対応するリー括弧積の同一視のもとに、幾つかの次数（主に５次）において基底を基底に沿って積分することでえられる行列の固有値、固有ベクトルを決定した。この結果は一般平面曲線の自由リー環への対数展開を経てホール基底への実数指数の５次までの展開を与える事を可能としている。この結果は５−学会発表①CIRM 研究所での国際会議で発表された。

当初のランダム常微分方程式の統計を視野に入れた、ランダムが語の持つ高次のモーメントの統計的実験については、現在までえられていない。本研究経費による計算機環境を用いて研究を継続する。

（２）一方で、計算機実験により形式ベキ級数の関係式に関する研究においては、三角群の複素１次元解析同形之原点における芽のなす群 Diff(C,0) への準同形について興味深い事実（２つの生成元の準同形による像は論文☆で発見された関係式を満たす）を観察した。この結果は現在精査中である。

（３）本研究課題は葉層および常微分方程式の解の幾何的研究の中で基本的役割を果たすものであるが、同じく常微分方程式の幾何構造として現れる WEB 構造についての研究において幾つかの進展があった。その一つに、Klein-Halphen web と Fermat web の発見である。所謂 Brieskorn 型の２次元特異点はその変数の分離された定義方程式の特徴から、曲面上で３つの座標関数の定める３つの葉層構造、即ち 3-web 構造はアヘキサゴナル構造（アフィン構造の一種）を持つことが容易に分かる。そのような特異点の中で最も重要な物が Klein-Halphen 型の特異点である。これらは複素平面の多面体群の部分群の商として得られる物である。よってその構造を持ち上げることで、そのような多面体群の対称性を持つ複素平面のヘキサゴナル 3-web ができる。Fermat 曲面もその特別な物であるが、一般に球面型でないため複素平面によりパラメトライズされない。しかしながら、Fermat 曲面のもつ変数の入れ替えにたいする対称性に着目し、そのある巡回群による商をとると平面によりパラメトライズされることが分かる。よって商の Web 構造は平面に持ち上がる。これを Fermat web である。このような構成を許す様々な特定の指数の Fermat web の系列は、第一積分を持つ平面のヘキサゴナル 3-web をすべてその引き戻しとして内包する普遍性をもつことが証明された。この結果は５−雑誌論文①で発表された。

（４）２つの３変数３次斉次多項式の組の定める複素３次元空間から複素平面への写像 f の位相系について以下の結果を得た。写像の位相形は、写像の各ファイバーの個々の位相と、それらが繋がり合い方により決まる。写像の特異点が原点のファイバー上で孤立していないとき、そのファイバーに沿った構を解析するためには、写像のファイバー積を取る事が有効である事が確認できた。具体的には、写像のファイバー積の原点のファイバーは、その定義より元の写像ｆファイバーのカルテシアン積（２次元）であるが、その中に代数曲線の部分構造が現れる事を発見した。３次の斉次写像ｆにたいしては、その代数曲線は直線の和集合であり、詳細な位相的考察よりその和集合は写像の位相共役不変量であることを示した。カルテシアン積構造の中のそれぞれの直線は積の成分、即ち元の写像ｆの原点のファイバー線形力学を与えるが、積のなかに２本以上の直線が存在するとき１次元の可換な力学系の族を定める。この族の解析の結果より、３次斉次多項式写像の集合は、位相共役類により層化され、その一つの層は位相形により葉層化される事を示した。この結果は以下５−学会発表③のスペイン、Tordesillas での研究集会で発表された。また論文として公表するための準備中である。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　１件）
①NAKAI, Isao,（単著、査読あり）
Webs and Singularities
Journal of Singularities Vol 9 (2014)
掲載ページ未定。
Proceeding of Algebraic Methods in
Geometry, Guanajuato, 2011.

〔学会発表〕（計　３件）
①NAKAI, Isao,
Geometry of Path group
Feuilletages et equations
differentielles complexes、(国際議）,
フランス、マルセイユ　CIRM 研究所、
２０１２年１０月１６日

②NAKAI, Isao,
Webs and Singularities
Les Jornees textiles,（国際会議)、
Universite de Rennes 1、フランス、
レンヌ、
２０１１年１１月２３日

③NAKAI, Isao,
Webs and Singularities
Resolution of singularities and
related topics,（国際会議)、
Tordesillas, スペイン, ２０１１年
９月２２日

６．研究組織
(1)研究代表者
中居　功（NAKAI, Isao）
お茶の水女子大学・大学院人間文化創成
科学研究科・教授
研究者番号：90207704

(2)研究分担者
なし

(3)連携研究者
なし