

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 2 日現在

機関番号：13103

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2011～2014

課題番号：23540237

研究課題名(和文)作用素環論の記号力学系理論への応用

研究課題名(英文)Applications of operator algebras to symbolic dynamical systems

研究代表者

松本 健吾 (Matsumoto, Kengo)

上越教育大学・学校教育研究科(研究院)・教授

研究者番号：40241864

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,300,000円

研究成果の概要(和文)：記号力学系とその C^* -環の代数構造の研究を主に次の3つの観点から研究した。一つ目はソフィックでない記号力学系の典型例であるダイクシフトやマルコフダイクシフトからできる C^* -環の代数構造とその K 群公式を研究した。二つ目はWolfgang Krieger 教授と共同で記号力学系に λ -synchronizationという性質を導入し、それがflow equivalence の不変量であることを証明した。また関連してマルコフダイクシフトのzeta関数と位相エントロピーを計算する公式を発見した。三つ目は松井宏樹教授と共同で位相的マルコフシフトの軌道同型類の完全分類定理を証明した。

研究成果の概要(英文)：I have studied symbolic dynamical systems and its C^* -algebras from the following three view points. I have first studied typical examples of symbolic dynamical systems such as Dyck shifts and Markov-Dyck shifts and its C^* -algebras. I have computed the K -groups of these C^* -algebras. I have second introduced a notion of λ -synchronization of subshifts with Wolfgang Krieger and proved that the λ -synchronization is invariant under flow equivalence. Wolfgang Krieger and I have also presented formulae of zeta function and topological entropy for Markov-Dyck shifts. I have third studied continuous orbit equivalence of one-sided topological markov shifts. Hiroki Matui and I have succeeded to obtain a complete classification theorem of continuous orbit equivalence of topological Markov shifts.

研究分野：作用素環論

キーワード：作用素環 記号力学系 C^* 環 位相的マルコフシフト 軌道同型

1. 研究開始当初の背景

マルコフ連鎖に付随する位相的マルコフシフトに代表される記号力学系は、サブシフトとも呼ばれ、一般に有限個の文字(アルファベット)を固定し、その文字からなる両側もしくは片側無限列全体の作るコンパクト、ハウスドルフ空間上のシフト(番号1つずらし)で不変な、閉部分空間に対して、その閉部分空間とシフトからなる位相力学系をいう。位相力学系としての研究だけでなく、確率論、測度論、エルゴート理論の視点からの研究や、言語理論や、計算機理論の観点からも、研究対象となっている。実際に計算機言語の中には、数多くの記号力学系の興味深いモデルとなるものが多くあり、応用面においては符号理論において現れる文字列の符号化や復号化などに実際にその理論が役立っている。位相的マルコフシフトは、記号力学系の中でも有限グラフや有限行列から定義されることもあり、今まで多くの研究がされてきた。そのような中で、Cuntz-Krieger は、1980年に、位相的マルコフシフトから、単純純粋無限型 C^* -環を構成した(Invent. Math. 56(1980))。これらは Cuntz-Krieger 環と呼ばれ、 C^* -環論のなかでも、数少ない良い研究対象のモデルとなる単純 C^* -環の例となっており、 C^* -環論の分類理論の中でも中心的な役割を演じている。

この Cuntz-Krieger 環の Ext-群は、元の位相的マルコフシフトの Bowen-Franks 群と呼ばれる flow equivalence の重要な不変量になっており、記号力学系の分類理論の観点からまたいへん興味深い位相共役不変量である。

本研究代表者は、これら Cuntz-Krieger 環の一般化として、位相的マルコフシフトとは限らない一般の記号力学系から C^* -環を構成していた(International J. Math. 8(1997),357-374)。続いて翌1998年の論文 Math. Scand. 82(1998),237-255 に於いて、この記号力学系から構成された C^* -環ならびにその内部の AF - 環の代数不変量である K -群、Ext-群、次元群を計算する公式を発見し、それらの K -理論的群がもとの記号力学系の位相共役不変量になっていることを後に続く論文 Documenta Math. 4(1999), 285-340、Ergodic Theory and Dynamical System 20(2000), 821-841 において証明していた。このようにして、 C^* -環の K -理論を経由することにより、それまで知られていなかった記号力学系の位相共役不変量が一挙に定義されたことになった。また、その C^* -環の構造並びに、その K -群公式の中から上記 Documenta 論文において lambda-graph system, symbolic matrix system という従来の有向有色有限グラフ、有限記号行列を一般化した概念を発見し、それが記号力学系の表現を与えることを示した。この表現により、一般の記号力学系をグ

ラフ的なもの、行列的なものとしてみるのが可能になった。与えられた記号力学系から標準的な方法で作られる lambda-graph system, symbolic matrix system をそれぞれ canonical lambda-graph system, canonical symbolic matrix system とよび、上記の Documenta 論文で、二つの記号力学系が位相共役であることと対応する canonical lambda-graph system, canonical symbolic matrix system がそれぞれ強シフト同値であることを証明した。この結果により、記号力学系の位相力学系としての分類がグラフ的なもの、行列的なものの分類に完全に言い換えられたこととなった。また、研究代表者は、論文 Documenta Math. 7(2002), 1-30 において記号力学系から作られる C^* -環の構成を一般化し、lambda-graph system から C^* -環を構成することにも成功した。記号力学系のみならずその表現からも C^* -環を構成することが可能となった。これらの C^* -環はもとの記号力学系や lambda-graph system が既約であれば単純かつ純粋無限型 C^* -環になり、作用素環の分類理論や構造論の観点からたいへん重要なクラスに入る C^* -環になっていることもわかっている。 C^* -環論の立場からでは、これらの C^* -環それ自身を研究することだけでもその構造理論の観点から大変興味深い課題である。さらにこれらの C^* -環の代数構造やその K -理論的な不変量がもとの記号力学系の位相共役不変量をあたえていることを考えると、なおさら興味深い研究対象であるといえる。実際に研究代表者により、canonical lambda-graph system から構成される C^* -環の K -群、Ext-群は、元のサブシフトの flow equivalence 不変量であることが証明されている。

研究代表者は、また、J. Reine. Angew.Math. 605(2007) に発表した論文で、lambda-graph system, symbolic matrix system という概念を、さらに一般化し、 C^* -記号力学系 (C^* -symbolic dynamical systems)という概念を導入した。これは、単位元を持った C^* -環 A とそれ上の記号 Σ で添字つけられた有限個の自己準同型からなる組のことであり、特に、 C^* -環 A が、可換有限次元環、可換 AF 環のときは、それぞれ有向有色有限グラフ、lambda-graph system と全く同じ概念となる。したがって C^* -記号力学系という概念は、記号力学系の C^* -環的な表現であると考えられる。 C^* -記号力学系から、自然にヒルベルト C^* -双加群が定義されるので、それに付随した C^* -環が構成される。この C^* -環達は、前述の Cuntz-Krieger 環や lambda-graph system からできる C^* -環を完全に含んだクラスになる。この C^* -環たちの中には Cuntz-Krieger 環からかけ離れた性質をもつものが多くあることもわかっている。たとえば、Cuntz-Krieger 環や lambda-graph system からできる C^* -環のゲージ作用の不

動点環は AF 環であったが、ゲージ作用の不
動点環が AT 環や, Bunce-Deddens 環になる
ものもある。もちろんこれらの C^* -環の代数的
な構造は、記号力学系の不変量にもなっ
ているので、記号力学系の位相共役不変量の研究
の意味においても、たいへん興味深い C^* -
環のクラスであると言える。

力学系の軌道同型と作用素環の同型類の関
係は、1960年代の H. Dye の研究に端を
発し、Connes による III 型因子間の分類
の主要な観点の一つになり、主に、測度論的
力学系とフォンノイマン環の理論にあらわ
れていた。そんな中、カントール集合上の極
小自己同相による連続軌道同型類と対応す
る C^* -環の同型類の研究が、
Giordano-Putnam-Skau (J. Reine Angew.
Math. 469(1995), 51--111) により、詳しく研究
され、これらの力学系の(強)軌道同型
類とその C^* -接合積の代数同型類が完全に対
応することが証明された。一般に、二つの位
相力学系が軌道同型であるとは、それらの軌
道を保った同相写像が存在するときをいう。
一般のコンパクトなハウスドルフ空間上の
topological free な自己同相については、富
山(Pacific J. Math. 173(1996), 571--583)に
より、連続軌道同型類と空間部分を保った
 C^* -接合積の代数同型類が完全に対応する
ことが証明されている。Cuntz-Krieger 環や
lambda-graph system からできる C^* -環は、
それぞれ片側マルコフシフト、片側サブシ
フトからできる C^* -環とも考えられる。片側マ
ルコフシフト、片側サブシフトは、同相写像
ではないので、上記 Giordano-Putnam-Skau
や富山が研究したケースは、あてはまらない。
そこで、この片側マルコフシフトや片側サブ
シフトの軌道同型類と対応する
Cuntz-Krieger 環や lambda-graph system
からできる C^* -環の同型類が完全に対応する
かという問題が自然におこる。本研究代表者
は、まず、論文において、片側マルコフシ
フトの間の連続軌道同型という概念を導入し
て、論文「Orbit equivalence of topological
Markov shifts and Cuntz-Krieger algebras」
Pacific Journal of Mathematics, 246 巻,
2010, 199-255 において、片側マルコフシ
フトの間の連続軌道同型類と対応する
Cuntz-Krieger 環の MASA を保った同型類
が完全に対応することを証明していた。
この同型類は、付随する位相充足群の空間同
型類とも対応していることが証明されてい
た。したがってこの連続軌道同型という概念
が Cuntz-Krieger 環の分類の力学系的な言
い換えにかなり近いものであることがわか
ってきており、 C^* -環の分類理論の観点から
も連続軌道同型という概念は、興味深く重要
な考え方であることがわかりはじめてきた。

2. 研究の目的

本研究の目的は、これら記号力学系並びに、

にその表現からできる C^* -環の代数構造やそ
の K -理論やさらには、 KK -理論的な構造
にもっと深く踏み込み、その C^* -環の代数的
な構造を基になっている記号力学系の構造
から、さらに詳細にその C^* -環たちを調べる。
さらには、それにより、新たな記号力学系の
位相共役不変量の発見や、記号力学系の分類
に新たな知見を得たいと考えている。特にマ
ルコフシフトとは異なったサブシフトの典型
例がダイクシフトと呼ばれるもので、この記
号力学系に付随した C^* -環の研究も行いたい。
これらの C^* -環達はもとの記号力学系の位相
共役類を完全に代数的に表現していると予
想されるので、これらの C^* -環の K -理論構
造や代数構造を使って、記号力学系の位相共
役類を表わす不変量を研究できればと考
えている。また、位相的マルコフシフトの軌道
同型類と対応する Cuntz-Krieger 環の同型
類との完全な対応、位相充足群の群としての
同型類との対応などの完全な対応を証明す
ることを目的とする。また、片側マルコフシ
フトの連続軌道同型類と両側マルコフシ
フトの flow equivalence の間の関係も漠然と
したものなので、この関係も明らかにしたい。
その過程で記号力学系のゼータ関数との関
連も明らかにすることも将来的な研究の目
的の一つとしたい。

3. 研究の方法

20011年度は、京都大学数理解析研究所
で作用素環の国際研究プロジェクト「作用素
環とその応用」が9月、11月、1月と系3
回のべ20日間において開催され、それに
参加し、国内外の主に作用素環の研究者と最
新の研究情報を交換できた。特に上記11月
の研究集会で I. F. Putnam 教授(カナダ、
ビクトリア大学)の力学系の軌道同型の講演
に触発され位相的マルコフシフトの軌道同
型類と Cuntz-Krieger 環の同型類に明確な
対応があることがわかり、論文「
Classification of Cuntz-Krieger algebras
by orbit equivalence of topological Markov
shifts」にまとめられた(Proc. AMSに掲載)。
この論文の内容を3月に東京理科大学で行
われた学会で発表した。

また、2次元の記号力学系である平面タイル
ぱりから C^* -環を構成できることがわかり、
11月に行われた作用素論・作用素環論研究
集会で講演し、参加者の九州大学の綿谷安男
教授、大阪教育大学の片山良一氏らと交流し
研究討論を行った。

20012年度は、9月と2月に京都大学数
理解析研究所での作用素環の研究集会に、連
携研究者の富山淳氏と共に参加し、参加者の
九州大学の綿谷安男教授と研究討論を行っ
た。そして、位相的マルコフシフトの充足群
の代数型が、マルコフシフトの連続軌道同型
類を決めることが分かった。この結果は9月
に行われた九州大学での日本数学会で発表

した。また、3月に来日した Wolfgang Krieger 教授(ドイツ ハイデルベルグ大学)と、マルコフダイクシフトの周期点とサブシフトの synchronization について研究討論を行った。8月から千葉大学の松井宏樹氏とのマルコフシフトの連続軌道同型についての共同研究がスタートした。

20013年度は、11月18日から11月23日までコペンハーゲン大学で行われ国際会議「Flow equivalence, symbolic dynamics and graph algebras」に出席し、Soren Eilers(コペンハーゲン大学)、Mike Boyle(ワシントン大学)、M. Tomforde(ニューヨーク大学)達と記号力学系の特に flow equivalence と C^* 環の構造の関係について議論を重ねた。この国際会議では招待講演「Orbit equivalence, full groups and Cuntz-Krieger algebras」を行い講演後多くの参加者と研究討論もできた。この講演の内容は松井宏樹氏との共同研究に元づくもので、flow equivalence を C^* - 環の言葉で完全に言い換えた結果が特に注目を集めたようだ。

最終年度2014年度は、国内の作用素環研究者と9月並びに2月に京都大学数理解析研究所、および東洋大学での作用素環・作用素環研究集会で研究討論を重ねた。研究会の参加者の連携研究者の富山教授、九州大学の綿谷安男教授、岡山大学の梶原毅教授と主として、軌道同型と構成される C^* - 環の代数型について研究討論した。また、W. Krieger 教授との研究討論から、マルコフダイクシフトの分類について進展があり、それを共同論文としてまとめることとなった。

4. 研究成果

ソフィックでない記号力学系とその C^* - 環の代数構造の研究として、ダイクシフトや、マルコフコード、マルコフダイクシフトから構成される C^* 環を考え、それが純粹無限型な単純 C^* 環であることやその K - 群、や Ext 群を個別に計算した、その結果は、下記の発表論文リストの(3)、(14)、(16)に出版した。いずれも、従来の知られているマルコフシフトとは異なった K - 群をもつことがわかり、したがってその C^* 環の代数型も Cuntz-Krieger 環と同型にならないことも分かった。

次に Wolfgang Krieger 教授と共同でマルコフダイクシフトの位相エントロピーとそのゼータ - 関数を求める公式を発見し、論文(13)において発表した。Krieger 教授とは、記号力学系に対して lambda-synchronization という性質を論文(8)で導入し、この性質が位相共役で不変であることが示された。lambda-synchronization という性質が両側マルコフシフトの flow equivalence で不変な性質であることを証明したのが論文(7)である。lambda-synchronization をもつサブシ

フトを lambda-synchronizing subshift と呼び、この C^* - 環の代数構造ならびに、 K 理論を展開したのが、論文(6)である。

また、記号力学系の軌道同型と対応する C^* - 環の代数構造に関する研究については、片側マルコフシフトの位相充足群が amenable でないことを論文(10)で証明し、この群の代数同型が、もとのマルコフシフトの連続軌道同型を導くことを論文(1)で証明できた。

論文(11)で、両側マルコフシフトの flow equivalence と Cuntz-Krieger 環の同型が片側マルコフシフトの連続軌道同型を導くことを証明した。その逆は、松井宏樹氏との共同研究で完全に解決された、結果は論文(2)に出版された。これにより、片側マルコフシフトの連続軌道同型の分類問題が一応決着したことになり、同時に両側マルコフシフトが flow equivalence であるための必要かつ十分条件が canonical な MASA を保った安定化 Cuntz-Krieger 環の同型類で完全に決まることが証明でき、マルコフシフトの flow equivalence の C^* - 環による完全な特徴付けに成功した。この結果は、20013年は、11月18日から11月23日までコペンハーゲン大学で行われた国際会議「Flow equivalence, symbolic dynamics and graph algebras」でも発表された。松井宏樹氏とは論文(4)においても beta-shift からできる位相充足群を Higman-Thompson 群の一般化として研究した。その他、記号力学系のゼータ関数の C^* 環的解釈の一つの試みとして、温度が必ずしも実数値をとらない KMS 条件を導入し論文(15)で発表した。

また、記号力学系の高次元版であるタイル張りとは C^* - 環についても研究を着手し、タイル張りの C^* - 環への作用という概念を定義し、構成される C^* - 環について論文(5)に発表した。組合せ論に現れる Catalan 数を Cuntz-Krieger 環の生成元を使えば一般化できることを思い付きまとめたのが論文(9)である。

また連携研究者の富山淳は、記号力学系を含んだ力学系のクラスとその C^* - 環の軌道同型について主に研究し、特に C^* - 環のイデアル構造ともとの力学系の位相的情報について深く調べ、論文(17)、(18)、(19)で発表した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計19件)

(1) 松本 健吾,

Full groups of one-sided topological Markov shifts, Israel Journal of Mathematics, 査読有, 205 巻, 2015, 1-33.

(2) 松本 健吾, 松井宏樹,
Continuous orbit equivalence of
topological Markov shifts and
Cuntz-Krieger algebras, Kyoto Journal of
Mathematics, 査読有,54 巻、2014,863-877.

(3) 松本 健吾,
Simple C^* -algebras arising from certain
Markov codes, Acta Sci. Math(Szged)., 査
読有, 80 巻、2014,95-120.

(4) 松本 健吾, 松井宏樹,
Topological full groups of C^* -algebras
arising from beta-expansions, Journal of
Australian Math. Soc., 査読有,97 巻、
2014,257-287.

(5) 松本 健吾,
 C^* -algebras associated with Hilbert
 C^* -quad modules of finite type,
International J. of Math. And Math Anal.,
査読有, 952068 巻、2014,21p.

(6) 松本 健吾,
 C^* -algebras associated with
lambda-synchronizing subshifts and flow
equivalence., Journal of Australian Math.
Soc., 査読有,95 巻、2013,241-265.

(7) 松本 健吾,
A certain synchronizing property of
subshifts and flow equivalence, Israel
Journal of Mathematics, 査読有, 196 巻、
2013, 235-272.

(8) Wolfgang Krieger, 松本 健吾,
A notion of synchronization of symbolic
dynamical systems and C^* -algebras, Acta
Appl. Math., 査読有, 126 巻、2013, 263-275.

(9) 松本 健吾,
Cuntz-Krieger algebras and generalization
of Catalan numbers, International Journal
of Mathematics, 査読有, 24 巻、2013, 31p.

(10) 松本 健吾,
K-groups of full group actions on
one-sided topological Markov shifts,
Discrete and continuous dynamical systems,
査読有, 33 巻、2013, 3753-3766.

(11) 松本 健吾,
Classification of Cuntz-Krieger algebras
by orbit equivalence of topological
Markov shifts, Proceedings of Amer. Math.
Soc., 査読有,141 巻、2013,2329-2342.

(12) 松本 健吾,
Some remarks on orbit equivalence of

topological Markov shifts, Yokohama Math.
J., 査読有,58 巻、2012, 41-52.

(13) Wolfgang Krieger, 松本 健吾,
Zeta functions and topological entropy of
the Markov-Dyck shifts, Munster J. Math.,
査読有, 4 巻、2011, 171184.

(14) 松本 健吾,
 C^* -algebras arising from Dyck systems of
topological Markov chains, Math. Scand.,
査読有,109 巻、2011, 31-54.

(15) 松本 健吾,
Ergodic properties and KMS conditions on
 C^* -symbolic dynamical systems, Documenta
Math. 査読有,16 巻、2011, 133-175.

(16) 松本 健吾,
A class of C^* -algebras arising from
non-sofic subshifts, Ergodic Theory Dynam.
Systems, 査読有,31 巻、2011, 459-482.

(17) de Jeu Marcel, 富山 淳,
Noncommutative spectral synthesis for the
involutive Banach algebra associated with
topological dynamical systems, Banach J.
Math. Anal., 査読有,7 巻、2013,103-135.

(18) de Jeu Marcel, Svensson Christa,
富山 淳,
On the Banach $*$ -algebra crossed products
associated with topological dynamical
systems, Journal of Functional Analysis,
査読有,262 巻、2012, 735-748.

(19) de Jeu Marcel, 富山 淳,
Maximal abelian subalgebras and
projections in two banach algebras
associated with topological dynamical
systems, Studia Math., 査読有,208 巻、
2012,47-75.

[学会発表](計7件)

(1) 松井宏樹, 松本 健吾,
Full groups of Cuntz-Krieger algebras and
Higman-Thompson groups, 日本数学会、2015
年3月23日、明治大学。

(2) 松井宏樹, 松本 健吾,
位相的マルコフシフトの軌道同型と力学系
のゼータ関数, 日本数学会、2014年9月23
日、広島大学。

(3) 松井宏樹, 松本 健吾,
Topological full groups of C^* -algebras
arising from beta-expansions, 日本数学会、
2013年9月23日、愛媛大学。

(4) 松本 健吾,
Hilbert C^* -quad module からできる C^* -環について, 日本数学会、2013年3月21日、京都大学。

(5) 松本 健吾,
位相的マルコフシフトの充足群と Cuntz-Krieger 環の分類について、日本数学会、2012年9月20日、九州大学。

(6) 松本 健吾,
位相的マルコフシフトの軌道同型類による Cuntz-Krieger 環の分類について、日本数学会、2012年3月22日、東京理科大学

(7) 松本 健吾,
タイルばりの作用からできる C^* -環とその K -群公式について、日本数学会、2011年9月30日、信州大学。

〔図書〕(計 件)

〔産業財産権〕
出願状況(計 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

取得状況(計 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等
<http://www.juen.ac.jp/math/matsumoto/matsumoto.html>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

松本 健吾 (MATSUMOTO KENGO)
上越教育大学・学校教育研究科・教授
研究者番号：40241864

(2) 研究分担者
()
研究者番号：

(3) 連携研究者
富山 淳 (TOMIYAMA JUN)
東京都立大学・理学部・名誉教授
研究者番号：30006928