

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 16 日現在

機関番号：14701

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2011～2013

課題番号：23540241

研究課題名(和文)非線形双曲型方程式系の大域解の存在とその漸近挙動

研究課題名(英文)Global existence and asymptotic behavior for systems of nonlinear hyperbolic equations

研究代表者

片山 聡一郎 (KATAYAMA, Soichiro)

和歌山大学・教育学部・教授

研究者番号：70283942

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,100,000円、(間接経費) 630,000円

研究成果の概要(和文)：非線形双曲型方程式(系)の初期値問題(あるいは初期値境界値問題)の大域解の存在条件及び漸近挙動について考察した。2次元空間の単独複素数値、あるいは連立の半線形波動方程式を考え、いわゆる零条件よりも弱い条件下での大域解の存在を示し、エネルギーが減衰するための条件を明らかにした。2次元空間や3次元空間における半線形あるいは準線形の波動方程式の外部問題を考え、零条件を仮定しないときの解の最大存在時間の評価を行った。また、質量項のない Dirac 方程式や(双曲型ではないが同様の手法が使える)シュレディンガー方程式系に対する零条件を明らかにし、大域解は漸近自由であることを示した。

研究成果の概要(英文)：We studied sufficient conditions for global existence of solutions and asymptotic behavior of global solutions to the Cauchy problem (or the exterior problem) for (systems of) nonlinear hyperbolic equations. For complex-valued (or systems of) semilinear wave equations in two space dimensions, we obtained sufficient conditions, which are weaker than the so-called null condition, for small data global existence, and also obtained sufficient conditions for the energy decay. For the exterior problem for semilinear or quasi-linear wave equations in two and three space dimensions, we derived a lower bound for the lifespan of classical solutions when the null condition is not satisfied. We also clarified the null conditions for massless Dirac equations and systems of nonlinear Schrödinger equations, and proved that the global solutions are asymptotically free.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：波動方程式 非線形 零条件 大域解 漸近挙動 弱零条件

1. 研究開始当初の背景

非線形双曲型方程式の初期値問題においては、(時間)局所解(ある時刻までの解)の存在はよく知られているが、(時間)大域解は一般には存在しない。

小さな初期値に限定すると、大域解存在の指標のひとつとして、非線形項の次数が考えられる。解が小さいときは、非線形項の次数が高ければ高いほど、非線形項の影響は小さくなるのが期待できる。また、多くの方程式(系)においては空間の次元が高いほど、解がより早く減衰することが期待できる。したがって、空間の次元に応じて、小さな初期値に対する大域解の存在・非存在を分ける臨界次数が定まる。

特に臨界次数の場合には、非線形項の次数以外の構造も大域解の存在・非存在に大きく影響することが知られている。非線形波動方程式系に対する大域解の存在を保証するような、この種の構造的な条件としては、零条件(null condition)が有名であるが、近年はそれよりも弱い条件もいくつか得られてきた。

また零条件の下での大域解は自由解(非線形項を取り除いて得られる線形方程式の解)に漸近することが多くの場合に知られているが、零条件よりも弱い条件の下では必ずしもそうではないことが分かってきた。そのため、零条件よりも弱い条件も視野に入れた大域解存在条件の解明とその場合の大域解の漸近挙動のさらなる研究が必要である。

2. 研究の目的

非線形波動方程式や非線形 Klein-Gordon 方程式に代表されるような非線形双曲型方程式の初期値問題(もしくは外部領域における初期値境界値問題)を考える。これまでの研究をさらに発展させ、小さな初期値に対して大域解の存在を保証するような零条件に対応する条件、あるいはそれよりも弱い条件を導き、その条件の下での大域解の漸近挙動を明らかにする。特に大域解が自由解に漸近しないような場合に興味があるが、零条件に対応するような条件が知られていないような方程式(系)に対しては、まずそのような条件を導くことから始め、大域解の存在と自由解へ漸近することを示す。また零条件を仮定しない一般の場合の解の最大存在時間についても研究する。精密な評価が得られれば、これが大域解存在条件の解明に繋がることも期待される。

3. 研究の方法

数学理論の研究であるから、論理的な推論を主体として研究を進めることになるが、多くの具体例に対する考察を行うことが一般論構築の助けとなる。

具体的な手法としては、非線形系方程式系の主要部を記述するような近似方程式を導出

し、その近似方程式の解析を通じて、元の問題の大域解の存在や漸近挙動などを明らかにする。近似方程式の解と真の解の誤差を評価するには、いわゆるベクトル場の方法が有効に働く。近似方程式(系)は多くの場合、ある種の非線形常微分方程式(系)とみなすことが出来るから、非線形常微分方程式(系)の摂動を調べることになる。

数学研究の一般的な方法であるが、研究会等における成果発表や情報収集・議論を通じて、結果をより精密なものへと改良していく。

4. 研究成果

(1) 2次元空間において3次の非線形項をもつ(単独の)複素数値非線形波動方程式の初期値問題を考察した。雑誌論文において、零条件よりも弱い、ある種の条件下で、小さな初期値に対して大域解が存在することを示し、各点的な漸近挙動を得た。この条件は、非線形項から計算される、ある関数に対する不等式の形で表されるが、この不等式を等号抜きで満たす強い場合にはエネルギーが減衰することも示した。ここでは近似方程式の解の具体的な表示を用いて、近似方程式の摂動の影響を調べた。精密な結果が得られる代わりに、たとえば連立系に対しては適用できない。

松村昭孝氏と砂川秀明氏との共同研究において、上記の結果の連立系への拡張も得た(投稿中)。先の複素数値の場合とは違い、近似方程式系の解の表示は全く用いずに、剰余項を無視しない方程式系に重みをかけて積分することにより、近似方程式に対する摂動の影響を直接調べるという手法を用いた。この手法は広く応用が可能であって、エネルギーの減衰を示すには十分である反面、複素数値の場合に用いた手法のように精密な各点挙動結果を得るのは難しい。

(2) (単独の)非線形波動方程式の有界な障害物の外部領域における初期値境界値問題を考察した。まず、3次元空間でディリクレ境界条件を課した場合を考え、近似方程式の解析を通じて解の最大存在時間の精密な評価を行った。すでに得られていた半線形の場合に加え、本研究においては、準線形の場合にも結果を拡張し、以前の結果と併せて雑誌論文として発表した(久保英夫氏との共同研究)。この評価に表れる定数は零条件が満たされる場合には無限大になる。この結果により外部領域においても零条件は全空間の場合と同様の意味を持つことが分かった。

2次元空間でのノイマン境界条件の場合の解の最大存在時間の評価も雑誌論文において行った(久保英夫氏、Sandra Lucente氏との共同研究)。全空間、もしくはディリクレ境界条件の場合よりも悪い結果しか得られなかったが、これが技術的な問題なのか、ノイマン条件下での解の挙動の本質的な違

いによるものなのかは、現時点では不明である。これまで、外部問題に対しては基本的には全空間での初期値問題と同様の結果しか得られていないため、もし本当に境界条件の影響で解の最大存在時間が短くなるのであれば、大変面白い現象だと思われる。

(3) 成分ごとに伝播速度が異なるような多重速度を持つ非線形波動方程式系の初期値問題を考察した。零条件とその条件下での大域解の存在は 2000 年代初頭から知られていた。報告者の以前の研究において、この大域解がエネルギーの意味では自由解に漸近するが、生の解の各点的な減衰は自由解よりも悪くなることを明らかにしていた。このときに用いた、解がエネルギーの意味で自由解に漸近するための必要十分条件の一般次元への拡張を本研究で行い、先の漸近挙動の結果と併せて雑誌論文として発表した。この必要十分条件は、すでにいくつかの場合に応用があり、漸近挙動を調べる際に有益な観点であると考えている。

(4) 雑誌論文において、3 次元空間における質量項のない Dirac 方程式を考察し、その零条件を明らかにし、零条件下での大域解の存在を示した。また、この大域解は自由解に漸近することも示した(久保英夫氏との共同研究)。なお、この結果は Klainerman の波動方程式に対する定理に帰着して示すことも出来るが、ここでは減衰が早くなる特別な量を見出すことにより直接証明した。これにより、変形して帰着する場合と比べて、零条件を満たす非線形項の構造上の役割がより明らかになったといえる。

(5) 双曲型ではないが、同様の考察が出来る場合として非線形シュレディンガー方程式がある。例えば物理的には双曲型方程式である Klein-Gordon 方程式の非相対論的極限としてシュレディンガー方程式が得られることから分かるように、方程式の型を超えた関連がある。

雑誌論文において、ある種の非線形シュレディンガー方程式系を 1 次元空間において考察して、解の減衰が自由解よりも早いことを (1) と同様の手法を用いて示した(砂川秀明氏、李春花氏との共同研究)。

また、雑誌論文においては、2 次元空間で質量共鳴があるような非線形シュレディンガー方程式系を考え、零条件を明らかにし、大域解の存在および大域解が自由解に漸近することを示した(池田正弘氏、砂川秀明氏との共同研究)。後者はいわゆる可微分性の損失を引き起こすような非線形項を扱っており、局所解の存在の導出に関しても注意が必要である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 7 件)

Masahiro Ikeda, Soichiro Katayama and Hideaki Sunagawa, Null structure in a system of quadratic derivative Schrödinger equations, *Annales Henri Poincaré*, 印刷中(電子出版済), 査読有.
<http://dx.doi.org/10.1007/s00023-014-0316-6>

Soichiro Katayama, Chunhua Li and Hideaki Sunagawa, A remark on decay rates of solutions for a system of quadratic nonlinear Schrödinger equations in 2D, *Differential and Integral Equations* **27** (2014), No.3-4, 301 - 312, 査読有.
<http://projecteuclid.org/euclid.die/1391091368>

Soichiro Katayama and Hideo Kubo, Global existence for quadratically perturbed massless Dirac equations under the null condition, *Fourier Analysis: Pseudo-Differential Operators, Time-Frequency Analysis and Partial Differential Equations* (M. Ruzhansky and V. Turunen, eds.), Birkhäuser, pp. 253 - 262, 2014, 査読有.

Soichiro Katayama, Hideo Kubo and Sandra Lucente, Almost global existence for exterior Neumann problems of semilinear wave equations in 2D, *Communications on Pure and Applied Analysis* **12** (2013), No.6, 2331 - 2360, 査読有.
<http://dx.doi.org/10.3934/cpaa.2013.12.2331>

Soichiro Katayama, Asymptotic behavior for systems of nonlinear wave equations with multiple propagation speeds in three space dimensions, *Journal of Differential Equations* **255** (2013), No.1, 120 - 150, 査読有.
<http://dx.doi.org/10.1016/j.jde.2013.04.003>

Soichiro Katayama and Hideo Kubo, Lower bound of the lifespan of solutions to semilinear wave equations in an exterior domain, *Journal of Hyperbolic Differential Equations* **10** (2013), No.2, 199 - 234, 査読有.
<http://dx.doi.org/10.1142/S0219891613500094>

Soichiro Katayama, Daisuke Murotani and Hideaki Sunagawa, The energy decay and asymptotics for a class of semilinear wave equations in two space dimensions, *Journal of Evolution Equations* **12** (2012), No.4, 891 - 916, 査読有.
<http://dx.doi.org/10.1007/s00028-012-0160-4>

[学会発表](計 4 件)

Soichiro Katayama, Semilinear hyperbolic systems violating the null condition, Mexico-Japan Joint Meeting on PDE at Morelia, 2013年9月5日, メキシコ自治大学モレリアキャンパス.

片山 聡一郎, A semilinear hyperbolic system violating the null condition, 第30回九州における偏微分方程式研究集会(招待講演), 2013年01月31日, 福岡大学.

Soichiro Katayama, A semilinear hyperbolic system violating the null condition, China-Japan Joint Meeting on PDE at Yanji, 2012年9月10日, 延辺大学.

片山 聡一郎, 異なる伝播速度を持つ非線形波動方程式系の解の漸近挙動, 函館偏微分方程式研究会(招待講演), 2012年1月28日, 公立はこだて未来大学.

研究者番号 :

〔図書〕(計0件)

〔産業財産権〕

出願状況(計0件)

名称 :
発明者 :
権利者 :
種類 :
番号 :
出願年月日 :
国内外の別 :

取得状況(計0件)

名称 :
発明者 :
権利者 :
種類 :
番号 :
取得年月日 :
国内外の別 :

〔その他〕

ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

片山 聡一郎 (KATAYAMA, Soichiro)

和歌山大学・教育学部・教授

研究者番号 : 70283942

(2) 研究分担者

()

研究者番号 :

(3) 連携研究者

()