

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 19 日現在

機関番号：16301

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2011～2014

課題番号：23540244

研究課題名(和文)非線形放物型偏微分方程式の解の特異性と定常問題の解構造

研究課題名(英文)Singularity of solutions for nonlinear partial differential equations of parabolic type and structure of solutions for the stationary problems

研究代表者

内藤 雄基(Naito, Yuki)

愛媛大学・理工学研究科・教授

研究者番号：10231458

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,900,000円

研究成果の概要(和文)：非線形放物型偏微分方程式に対して、解の特異性と定常問題の解構造との関連性について考察を行った。半線形熱方程式のCauchy問題の解の挙動において、自己相似解が複数個存在する場合の、それら自己相似解の役割を明らかにした。半線形熱方程式のCauchy問題において、解が有限時刻爆発するための初期関数の無限遠方における最適な減衰条件を示すことができた。p-Laplace作用素をもつ楕円型偏微分方程式の特異境界近傍における球対称振動解の漸近的挙動における幾何学的性質を明らかにした。

研究成果の概要(英文)：We study the singular behavior of solutions for nonlinear partial differential equations of parabolic type, and investigate the relations between the singularity and the solution structure of the stationary problems. We verify the roles of self-similar solutions in the Cauchy problems for semilinear heat equations in the case where the problem has multiple self-similar solutions. We consider the Cauchy problem for semilinear heat equations, and show the optimal spatial decay condition of initial functions at infinity for the blow-up in finite time. We consider the elliptic partial differential equations involving p-Laplace operator, and show the geometrical properties of radially symmetric solutions which has singular behavior near the boundary.

研究分野：数物系科学

キーワード：放物型偏微分方程式 定常問題 非線形解析 自己相似解 解の爆発

1. 研究開始当初の背景

(1) 非線形熱方程式は、スケール不変性や勾配構造、比較原理といった豊かな数学的構造を備えていることが知られており、この問題の解の性質の解明のために、多くの新しいアイデアや手法が提案・開発されている。それらのアイデア・手法は、同様な構造をもつ様々な非線形問題に適用されている。

(2) 非線形熱方程式の定常問題においては、空間次元によって決定される臨界指数が存在し、その指数を超えるごとに解の構造が劇的に変化することが知られている。

(3) 自己相似解は、相似変換を用いて書き直した方程式の定常解として捉えることができる。放物型問題においては、不動点定理(縮小写像の原理)を用いることにより初期値との差が十分小さい場合についてのみ適当なクラスの自己相似解の安定性が示されている。

(4) 細胞性粘菌の集中現象を記述するために導出された走化性方程式系に対しては、近年国内外において活発な研究がなされている。この系はスケール変換不変性をもち自己相似解の構造が考察されている。

2. 研究の目的

(1) 非線形熱方程式における前方自己相似解の安定性・不安定性を明らかにし、放物型問題における役割を考える。とくに比較定理を用いて、初期値と自己相似解との関係により解の挙動が決定されること、さらに初期値の空間的漸近挙動と解の時間大域的挙動との関連を明らかにする。

(2) 非線形熱方程式において初期値にパラメータを導入し、パラメータを連続的に変化させたときの解の挙動を考察する。とくに変分的手法を用いて Sobolev 臨界における時間大域解と有限時刻爆発解の境目に現れる解の挙動を明らかにする。

(3) 走化性方程式系の臨界初期値における時間大域解の挙動について考察する。とくに空間2次元の全領域における球対称解に対して、スケール不変性、勾配構造を活用することにより、不規則に振動する解および無限時間爆発解を構成する。

3. 研究の方法

(1) 前方自己相似解の安定性・不安定性と放物型問題における役割においては、自己相似解を、相似変換を用いて書き直した方程式の定常解として捉え、連続関数のクラスでの弱優解-弱劣解法による比較原理を用いる。

(2) 時間大域解と有限時刻爆発解の境目に現れる解の挙動についての考察においては、定

常解の変分的特徴付けを利用した初期値の集合を導入し、方程式が勾配系であるという性質を利用し、エネルギー関数を調べることにより解の挙動を考察する。

(3) 走化性方程式系の臨界初期値における時間大域解の挙動については、積分量を未知関数とする方程式に変換することにより、指数増大度をもつ非線形問題に帰着されることを手がかりに考察を行う。とくに解のクラスを球対称解に限定し、常微分方程式の手法を用いる。

4. 研究成果

(1) ポテンシャル項にパラメータを伴う2階線形常微分方程式に対して固有値の状況に基づく方程式の分類を行った。ポテンシャルが臨界と呼ばれるクラスに属する2階線形微分方程式においては、パラメータの大きさに応じて解の零点の個数が有限個の場合も無限個の場合も起こりうるということが知られている。そのような2階線形微分方程式に対して、加算無限個の固有値が現れる場合と高々有限個の固有値が現れる場合、固有値が現れない場合があることを示し、それらの十分条件を与えた。さらにこれらの結果を楕円型偏微分方程式の特異固有値問題に適用し、加算無限個の有界な固有値が現れるための十分条件を与えることができた。

(2) 半線形熱方程式の Cauchy 問題の解の挙動について考察を行った。この問題においては、初期関数が十分小さく、かつ無限遠方で十分早く減衰する場合は、解は時間大域的となること、無限遠方での減衰が緩やかな場合は解が有限時刻で爆発することが知られており、さらにその境界となる臨界多項式オーダーが知られている。ここでは、その臨界多項式オーダーをもつ初期関数に対して、前方自己相似解と比較することにより、解が時間大域的に存在するための必要条件および十分条件を示し、さらに時間大域解の時間無限における解の挙動を明らかにした。とくに半線形熱方程式においては、非線形項の指数に応じて、自己相似解の個数が変化すること、自己相似解が存在する場合には、必ず最小自己相似解が存在することが知られている。2つ以上の自己相似解が存在する場合、非最小自己相似解は、時間大域解と有限時刻爆発解を分ける敷居解となること、そして時間大域解は漸近的に最小自己相似解に収束することを示すことができた。

(3) 半線形熱方程式の Cauchy 問題において、解が有限時刻爆発するための初期関数の無限遠方における最適な減衰条件を明らかにすることができた。この最適な減衰条件は、非線形項の指数が Joseph-Lundgren の指数と呼ばれる指数より大きい場合には、すでに Wang(1993) により知られていたが、それ以

外の場合には未知であった。自己相似解との比較により、有限時刻で爆発するための条件が得られ、さらに、この条件が最適であることを示すことができた。

(4) 走化性を記述するとされる Keller-Segel 系の単純化モデルとされる放物型-楕円型方程式系の Cauchy 問題を空間 2 次元において考察を行った。この系の解の挙動は、初期値の体積により決定されることが知られており、ある値より小さいと解は時間大域的に存在すること、その値より大きいと有限時刻において爆発することが知られている。本研究では、その臨界値における解の挙動について考察を行った。臨界値において、無限時間をかけて爆発する解の存在は既に得られているが、ここでは球対称解に限定することにより、有界で振動する解と非有界かつ振動する解の構成を行った。

(5) p-Laplace 作用素をもつ偏微分方程式の特異境界近傍における球対称振動解の漸近挙動に対して、解のグラフの有限長・無限長という幾何学的性質について考察を行った。とくに空間多次元における球対称振動解が境界近傍で有限長および無限長であるための判定条件が得られた。とくに、それらが空間 1 次元の場合の判定条件と同一であることを明らかにした。

(6) 多次元の球内部において、p-Laplace 作用素をもつ方程式を考え、その境界で特異性をもつ解を特徴付けるため、その解のグラフのフラクタル次元について考察を行った。多次元領域における球対称解のグラフのフラクタル次元についての研究と、対応する常微分方程式の解に対する結果とを活用することにより球対称解の境界において解のグラフの box dimension が与えられた値をもつための方程式の係数に対する十分条件を求めることができた。これにより、振動解の特異性と方程式の係数との関連性を明らかにすることができた。

(7) 原点に特異性を持つ 2 次元線形常微分方程式系を考え、原点に収束する解の挙動、とくに原点近傍における解軌道の求長可能性について考察を行った。ここでは、方程式系の係数行列に対する固有値の原点における挙動により、解軌道の求長可能性を特徴付けられることが明らかとなった。さらに、多項式増大度の特異性をもつ 2 次元線形常微分方程式系に対して適用可能な十分条件、必要条件が得られた。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計 25 件)

Katsuyuki Ishii, An approximation scheme for the anisotropic and nonlocal

mean curvature flow, *Nonlinear Differential Equations and Applications NoDEA* 21 (2014) 219–252. 査読有り
DOI:10.1007/s00030-013-0244-z

Ryuji Kajikiya, Non-even positive solutions of the Emden-Fowler equations with sign-changing weights, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 143, (No.3) (2013), 631--642. 査読有り
DOI:dx.doi.org/10.1017/S0308210511001594

Yuki Naito, Mervan Pasic, Satoshi Tanaka and Darko Zubrinic, Fractal oscillations near the domain boundary of radially symmetric solutions of p-Laplace equations, *Contemp. Math.* 601 (2013) 325--343. 査読有り
DOI: x.doi.org/10.1090/conm/601/11912

Yuki Naito and Tokushi Sato, Non-homogeneous semilinear elliptic equations involving critical Sobolev exponent, *Ann. Mat. Pura Appl.* (4) 191 (2012) 25--51. 査読有り
DOI: 10.1007/s10231-010-0173-y

Yuki Naito, The role of forward self-similar solutions in the Cauchy problem for semilinear heat equations, *J. Differential Equations* 253 (2012) 3029--3060. 査読有り
DOI:org/10.1016/j.jde.2012.08.013

Yuki Naito and Takasi Senba, Blow-up behavior of solutions to a parabolic-elliptic system on higher dimensional domains, *Discrete Contin. Dyn. Syst.* 32 (2012) 3691--3713. 査読有り
DOI:10.3934/dcds.2012.32.xx

Yuki Naito, Classification of second order linear differential equations and an application to singular elliptic eigenvalue problems, *Bull. Lond. Math. Soc.* 44 (2012) 545--562. 査読有り
DOI:10.1112/blms/bdr117

〔学会発表〕(計 40 件)

内藤雄基、非線形熱方程式に対する Cauchy 問題の解の漸近的性質、2014 年 6 月 4 日岡山談話会、東京工業大学、東京

Yuki Naito, Global behavior of solutions to semilinear heat equations,

International Conference
"Quantization blow-up and
concentration in mathematical physics
view point, 2013年3月28日 大阪大
学、大阪

Yuki Naito, Separation structure of
positive radial solutions for
semilinear elliptic equations,
Swiss-Japanese Seminar 2012年12月
18日 University of Zurich, Zurich, ス
イス

Yuki Naito, Global attractivity
properties of stationary solutions
for semilinear heat equations, 5th
Euro-Japanese Workshop on Blow-up,
2012年9月10日 CIRM, Marseille-Luminy,
フランス

Yuki Naito, The role of self-similar
solutions for semilinear heat
equations, The 8-th East Asia PDE
Conference, 2011年12月22日 POSTECH,
Pohang, 韓国

Yuki Naito, Rectifiable oscillations
of radially symmetric solutions of
p-Laplace differential equations,
International Workshop on Geometric
and fractal analysis of PDEs and
differential systems-Zagreb 2011年7
月29日, University of Zagreb, Zagreb,
クロアチア

Yuki Naito, A remark on singular
eigenvalue problems for second order
linear differential equations, 2011
International Workshop on Nonlinear
PDE and Applications, June 21-24, 2011
年6月24日 Pusan National University,
Pusan, 韓国

〔その他〕

ホームページ等

<http://www.math.sci.ehime-u.ac.jp/~ynaito/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

内藤 雄基 (Yuki Naito)

愛媛大学・大学院理工学研究科・教授

研究者番号：10231458

(2) 研究分担者

梶木屋 龍治 (Ryuji Kajikiya)

佐賀大学・大学院工学研究科・教授

研究者番号：10183261

石井克幸 (Katsuyuki Ishii)

神戸大学・大学院海事科学研究科・教授
研究者番号：40232227

(3) 連携研究者

柳田 英二 (Eiji Yanagida)

東京工業大学・大学院理工学研究科・教授

研究者番号：8017548

仙葉 隆 (Takasi Senba)

九州工業大学・大学院工学研究科・教授

研究者番号：30196985

吉川 周二 (Syuji Yoshikawa)

愛媛大学・大学院理工学研究科・准教授

研究者番号：80435461

猪奥 倫左 (Norisuke Ioku)

愛媛大学・大学院理工学研究科・助教

研究者番号：50624607