1版

様　式　C－19、F－19、Z－19　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 27 年　 5 月 21 日現在

機関番号：32642
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2011～2014
課題番号：23540245
研究課題名（和文）高種数代数曲線に関連した差分方程式

研究課題名（英文）Difference equations related with higher genus algebraic curves

研究代表者
中屋敷　厚（Nakayashiki, Atsushi）

津田塾大学・学芸学部・教授

研究者番号：10237456

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,600,000円

研究成果の概要（和文）：可積分系の構造を用いて、リーマン面のテータ関数について2種類の展開を研究した。一つはテイラー展開で、展開の初期項をシューア関数とよばれる特殊多項式を用いて決定した。2つ目はテータ関数をリーマン面の直積上の関数と考えた時、その中の一つのリーマン面の変数に関する展開で、展開の初期項をテータ関数の具体的な微分を用いて記述した。この2つの結果を用いて、リーマンの特異点定理とよばれる、テータ関数の零点の重複度に関する古典的定理の精密化および拡張を証明した。別の応用として、代数的性質を持ち今後の発展が期待されている多変数シグマ関数について加法定理およびモジュラー不変性と呼ばれる重要な性質を証明した。

研究成果の概要（英文）：Using the structure of integrable systems we have studied two kinds of expansions of the theta function associated with a Riemann surface of an arbitrary genus. One is the Taylor expansion of the theta function at an arbitrary point on the theta divisor. We have determined the initial term as the Schur function . The other is the expansion of the theta function considered as a function on the direct product of the Riemann surface. We have described the initial term of the expansion in one of the variables of the product by the explicitly given derivative of the theta function. As an application of the these results we have generalized the celebrated Riemann's singularity theorem. As other applications we have derived certain addition formulae of the multivariate sigma function and proved the modular invariance of it.

研究分野：可積分系とテータ関数

キーワード：高種数シグマ関数　モジュラー不変性　リーマンの特異点定理　シューア関数　可積分階層のタウ関数　普遍グラスマン多様体　テータ関数　ギャップ列

１．研究開始当初の背景

(1) 2 次元イジング模型の拡張である統計力学の模型の中に、高種数代数曲線に関係したカイラルポッツ模型とよばれる可解な模型がある。研究代表者を含む研究者による従来の研究によりこの模型の一般化された n 点相関関数は、高種数代数曲線上の関数を係数とする差分方程式を満たすことが知られていた。その方程式が模型の研究に重要な役割を果たすことは従来の他の模型の研究および Baxter によるカイラルポッツ模型の 1 点相関関数についての研究からも明らかであった。しかしその解の具体形についてはほとんど何も分かっていなかった。

(2) 以上とは全く別な筋の研究として、主にロシア-ウクライナの研究者による多変数シグマ関数の研究が進展していた。これは高種数代数曲線から作られる多変数の関数であるが、これを用いて特別な場合に代数曲線上の関数の解析的表示が得られていた。また楕円関数の自然な拡張となる様々な代数的な関係式も研究されていた。これらは非線形の差分方程式と言えるものである。特にパフィアンを用いて表現された超楕円曲線の場合の 2 次の加法定理は楕円曲線の場合の公式の見事な拡張であるが、いかに他の曲線の場合に拡張すべきかについては何もわかっていない状況であった。研究代表者は多変数シグマ関数の基礎付けに関する研究を行い、その代数的性格の応用可能性に大きな期待を持っていた。

２．研究の目的

高種数代数曲線に関係した 2 つの問題の解決を主な目的として研究した。

(1) 1 つ目はカイラルポッツ模型の一般化された 2 点相関関数の満たす差分方程式の解の明示的解析的表示を導くことである。

(2) 2 つ目は、超楕円多変数シグマ関数が満たす 2 次の加法定理の、可積分系の構造を用いた別証明を与え、それをより一般の代数曲線の場合に拡張することである。

３．研究の方法

(1) 研究目的(1)についてであるが、非自明で最も単純な場合である 3 状態カイラルポッツ模型を研究することにした。この場合に 2 点相関関数の満たす差分方程式の係数のテータ関数による表示を導き、次に 1 つの方向を決めその方向への無限積表示を導く、と言う方法での研究を計画した。

(2) 研究目的(2)についてであるが、可積分系のタウ関数と言う概念が高種数代数曲線のテータ関数の拡張と考えられるので、可積分系の構造を活用して、シグマ関数の性質を洗い直し、超楕円シグマ関数に対する 2 次の加法定理の別証明および拡張を与えるという方法・戦略を考えた。

４．研究成果

(1) 多変数シグマ関数の加法定理

リーマン面のテータ関数に対しては Fay の公式と呼ばれる加法定理が知られている。リーマンのテータ関数と多変数シグマ関数とはある関係で結ばれているのでこれを多変数シグマ関数の公式に読み直すことが出来る。本研究では、(n,s)曲線と呼ばれる平面代数曲線やテレスコピック曲線と呼ばれる高次元空間の中で具体的な式で定義される代数曲線のシグマ関数に対して、Fay の公式の代数版と言えるような加法定理を証明し、さらに加法定理に含まれる変数の数が曲線の種数よりも少ない場合の加法定理を証明した。後者の加法定理は前者の加法定理の極限として得られるのであるが、その形を明示的に求めるには、シグマ関数を代数曲線の直積上の関数と思ったとき、その中の一つの変数に関するテータ関数の展開の初期項を知る必要がある。この初期項は KP 階層と呼ばれる可積分系のタウ関数の性質を調べることにより決定した。タウ関数の方法はテータ関数の研究のための強力な手段であり、他にもシグマ関数に対する新しい消滅定理・非消滅定理を証明した。さらに、上記代数曲線に対するプライムフォームをテータ関数の明示的な微分により表す公式を証明した。プライムフォームというのはテータ関数に関する Fay の理論で中心的な役割を果たすものであるが、非特異奇半周期と呼ばれる一般的には存在のみ証明されており具体的には知られていない量を用いて定義されているので、テータ関数の具体的な公式を書くときには都合が悪いのである。今回の結果はこの意味でも意義のあるものである。

(2) リーマンの特異点定理の拡張

KP 階層のタウ関数を用いたテータ関数の研究をさらに進めることにより、特別な代数曲線に限らない一般のリーマン面のテータ関数の展開や微分に関する性質を導くことが出来た。これについての詳細は次の(3)で述べる。その重要な帰結としてリーマンの特異点定理の精密化と一般化を定式化し証明した。リーマンの特異点定理というのは、リーマン面のテータ関数の零点の重複度を、零点に対応する線形系の次元を用いて表すという古典的な定理である。それはテータ関数の解析的性質をリーマン面に付随した幾何学的

量で表すという興味深い内容を持っている。重複度というのは、重複度で表される数より小さい次数の微分はすべて消えるが、重複度で表される次数の微分の中には消えないものがあるという性質を持った数のことである。ただリーマンの特異点定理では、具体的にどの微分が消えないかについては一般には何も言っていない。本研究では、重複度に等しい次数の微分で零にならないものを、すべてのリーマン面とそのテータ関数のすべての零点に対して具体的に一つ求めた。また(n,s)曲線やテレスコピック曲線の場合の拡張として、テータ関数の新しい消滅定理を証明した。

(3) テータ関数の展開

KP 階層のタウ関数を用いて一般のリーマン面の場合に、テータ関数のすべての零点におけるテイラー展開の初期項、およびリーマン面の直積上の関数と思った時の１つのリーマン面の変数に関する展開の初期項を決定した。テイラー展開の初期項は、テータ関数の零点に対応する平坦直線束のギャップ列と呼ばれる幾何学的量から定まる分割に対応するシューア関数として決定した。直積上の展開の初期項は、テータ関数の明示的微分を用いて記述した。以上の結果を用いて(2)で述べた結果が証明される。また、以上の結果は一般のリーマン面に対する Fay の加法定理の退化を研究するのに役に立つことが期待される。それはさらに数理物理に現れる様々な方程式の解の構成に応用されることが期待される。

(4) 多変数シグマ関数の正規化定数の決定

多変数シグマ関数の最も重要な性質にモジュラー不変性がある。(n,s)曲線など具体的な曲線に対しては、適当な正規化定数が存在してモジュラー不変になることが厳密に証明されていた。しかし、Korotkin-Shramchenko によって定義された一般のリーマン面のシグマ関数に対しては、1 のべき根の自由度を除いてモジュラー不変と言うことしか証明されていなかった。本研究では(2)，(3)の研究を応用して、Korotkin-Shramchenko の提案した正規化定数とは見かけ上異なる正規化定数を用いると、シグマ関数はモジュラー不変になることを証明した。これにより、一般のリーマン面に対するシグマ関数の一つの定義が確定したことになる。これは今後の研究に大きな意義をもつと考える。

以上まとめると、当初の計画通りには研究は進展せず、目標とした 2 つの問題の解決には至らなかった。しかし可積分系のタウ関数を用いるテータ関数の研究が有効な方法であることは当初予期していなかった多くの興味ある結果を導くことで実証出来たと考える。これは今後の研究につながる本研究の大きな成果の一つであると考える。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　3　件）

① Takanori Ayano and <u>Atsushi Nakayashiki,</u> On addition formulae for sigma functions of telescopic curves, Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications, 査読有、Vol. 9, 2013,046,14pages,
http://www.emis.de/journals/SIGMA/2013/046/

② Andrey Mironov and <u>Atsushi Nakayashiki</u>,,Discretization of Baker-Akhiezer modules and commuting difference operators in several discrete variables, Transaction of Moscow Mathematical Society, 査読有, Vol. 74, No.2, 2013, pp. 261-279

③ <u>Atsushi Nakayashiki</u> and Keijiro Yori, Derivatives of Schur, tau and sigma functions on Abel-Jacobi images, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics “Symmetries, Integrable Systems and Representations”,査読有、Vol. 40, 2013, pp. 429-463

〔学会発表〕（計　10　件）

① A. Nakayashiki, On series expansions of higher genus sigma functions , workshop on Curves, Moduli and Integrable Systems, 2015 年 2 月 17 日、Tsuda College(東京都・小平市)

② 中屋敷　厚, リーマンの特異点定理の精密化について、研究会「リーマン面に関 係する位相幾何学」、2014 年 8 月 26 日、東京大学数理科学研究科(東京都・目黒区)

③ A. Nakayashiki, An application of the theory of tau function to Riemann's theta function, Tsuda College mini-workshop on Calabi Yau varieties: Arithmetic Geometry and Physics, 2014 年 8 月 8 日、Tsuda College(東京都・小平市)

④ A.Nakayashiki,　An application of the theory of tau function to Riemann's theta function ,　workshop on Algebraic Curves with Symmetries, Their Jacobians and Integrable Dynamical Systems, 2014 年 7 月 31 日、National University of Kyiv-Mohyla Academy (Kiev, Ukraine)

⑤ 中屋敷　厚，リーマン面のシューア関数、玉原特殊多様体研究集会、2013 年 9 月 10 日、東京大学玉原セミナーハウス(群馬県・沼田市)

⑥ A. Nakayashiki, Riemann surfaces and Schur functions, conference "Geometry day," 2013 年 8 月 31 日, Sobolev Insitute of Mathematics (Novosibirsk, Russia)

⑦ A. Nakayashiki, Riemann surfaces and Schur functions, conference "String theory, Integrable systems and Representation theory", 2013 年 7 月 30 日、Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University (京都府・京都市)

⑧ A.Nakayashiki, A refined Riemann's singularity theorem for sigma functions, conference on Algebraic Topology and Abelian Functions, 2013 年 6 月 18 日、Steklov Institute (Moscow, Russia)

⑨ 中屋敷　厚，Construction of quasi-periodic solutions of soliton equations，離散可積分系、離散微分幾何チュートリアル 2012, 2012 年 2 月 22 日-24 日九州大学大学院数理学研究院（福岡県・福岡市）

⑩Atsushi Nakayashiki, Abel-Jacobi map and Schur functions, conference on Symmetries, Integrable Systems and Representations, 2011 年 12 月 13 日，Universite de Lyon (Lyon, France)

〔図書〕（計　0　件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計　0　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計　0　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織
(1)研究代表者
中屋敷　厚（Nakayashiki，Atsushi）
津田塾大学・学芸学部数学科・教授
研究者番号：10237456

(2)研究分担者
（　　）

研究者番号：

(3)連携研究者
大西　良博（Onishi，Yoshihiro）
名城大学・理工学部数学科・教授
研究者番号：60250643

趙　康二（Cho，Koji）
九州大学・大学院数理学研究院・准教授
研究者番号：10197634

今野　均（konno，Hitoshi）
東京海洋大学・大学院海洋科学技術研究科・教授
研究者番号：00291477