

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 5 月 14 日現在

機関番号：24403

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2011～2014

課題番号：23540248

研究課題名(和文)楕円型偏微分方程式と放物偏微分方程式の融合的研究

研究課題名(英文)Unified investigation on elliptic and parabolic equations

## 研究代表者

壁谷 喜継 (Kabeya, Yoshitsugu)

大阪府立大学・工学(系)研究科(研究院)・教授

研究者番号：70252757

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,700,000円

研究成果の概要(和文)：連携研究者の石毛和弘氏と共同で、主に線形放物型方程式の解の時間大域的挙動について研究を行った。この研究においては、定常状態を記述する楕円型方程式の正值解の性質が、時間大域的挙動に大きな影響を及ぼすことを見だし、主要な結果は Journal of Functional Analysis 誌に2012年度に発表した。そのほか、関連する時間大域的挙動についての成果も、外国学術雑誌にて公表した。また、球面、もしくは双曲空間上の楕円型方程式の解の性質についても解明を行い、その成果も外国学術論文誌にて発表した。

研究成果の概要(英文)：With Professor Kazuhiro Ishige, who is my liaison collaborator, I investigated the large time behaviors of solutions to linear parabolic equations. During the research, I found that properties of a positive solution to the corresponding elliptic equations, which describe the steady states, affect the large time behaviors of solutions and published the main results in Journal of Functional analysis in 2012. Also related results on large time behaviors of solutions were published in foreign academic journals.

Properties of solutions to elliptic equations on a sphere or on the hyperbolic space were also investigated and published in foreign academic journals.

研究分野：偏微分方程式論

キーワード：ホットスポット 楕円型方程式 放物型方程式 時間大域挙動 時間減衰 シュレディンガー半群

### 1. 研究開始当初の背景

放物型偏微分方程式の解の性質の解明は、その定常状態を表す楕円型方程式の性質には余り注意を払われずになされていることが多く見受けられる。しかし、学部2年生レベルでの線形熱方程式の解法において、実は定常状態の性質から時間大域的挙動が分かることが示されている。ここでは、特に線形の放物型方程式の場合、やはり、定常状態を表す楕円型方程式の解の性質の解明から、時間大域的な挙動の解明がなされるはずであるという着想に至った。

一方で、シュレディンガー半群という概念が1980年代後半に確立され、半群の性質と対応する楕円型作用素の臨界・劣臨界という概念も生まれてきた。ポテンシャル項を持った線形の放物型方程式と対応する楕円型方程式の解相互の関係を詳しく解明することが期待されるようになっていたため、楕円型方程式の解の性質が、どのように放物型方程式の解の性質の解明に役立つのかを明らかにする時期に到達していると、研究当初は考えた。

### 2. 研究の目的

(1)放物型偏微分方程式の解の挙動に関して、対応する楕円型偏微分方程式(定常問題)の解の性質がどのように関与しているかを、今までとは違った視点、方法から解明する。放物型の定常問題として、楕円型方程式をとらえることは以前から行われてきたことであるが、多くの場合、定常問題の解は初期値の摂動に関して不安定であり、放物型方程式の挙動に関しては情報を与えてこなかったと思われがちである。しかしながら、本研究においては、放物型偏微分方程式の時間微分の項を楕円型偏微分方程式の非斉次項とみなすことで、球対称な楕円型偏微分方程式の理論を用いて、より積極的に、楕円型偏微分方程式の解が背後で放物型偏微分方程式の解の挙動をどのように支配しているかを明確にし、放物型偏微分方程式の最大点や解の時間的大域挙動などを解明することを目的とする。具体的には、ポテンシャル項が付いた線形熱方程式の解の時間大域的挙動(解の最大値の位置、時間減衰評価)について研究を行う。

(2)放物型の解明のためには楕円型方程式の解の基礎的な研究が必要となるが、特に球面や双曲空間での時間発展問題の基礎的な課題の解決は1990年代後半のC. Bandleらの仕事があるが、それ以降、余り進んでいないと思われる。従って、これらの領域での楕円型方程式の解構造の解明を行う。

### 3. 研究の方法

楕円型方程式に関しては、今までの科学研究費補助金による研究の蓄積があり、それを放物型方程式に反映させる方向で研究を進めるが、それだけでは解決できないのは認識しており、今までも研究の蓄積があるシュレディンガー半群の研究成果を比較検討しながら、研究を進める。特に、シュレディンガー半群に関しては、E. B. Davies and B. Simonによる“ $L^p$  norms of noncritical Schroedinger semigroup”, Journal Functional Analysis 102 (1991)などの成果を基に、特に彼らがcritical caseと呼んでいる、ハーディの不等式の臨界係数の場合を特に検討する。放物型方程式の専門的知識は、連携研究者で東北大学大学院理学研究科教授の石毛和弘氏と綿密に連絡を取りあり、相互に訪問することで問題点を明らかにして、解決へと進む。このため、連携研究者の石毛和弘氏を訪問し討論と論文作成を行うとともに、北海道大学、東北大学、東京工業大学、明治大学、京都大学数理解析研究所、九州大学などで開催される研究集会に出席し、講演者と討論をすることで、研究動向と現在の最先端の研究の状況の把握に努める。

そのほか、国際研究集会に参加して、研究成果について講演発表を行うとともに、欧文学術雑誌に投稿する。

### 4. 研究成果

(1)ポテンシャル項付き熱方程式の時間大域的挙動については、ポテンシャル項が空間遠方で逆二次での減衰をしている場合、シュレディンガー半群の意味での劣臨界の場合を中心に解明することができ、「主な発表論文等」の項の に挙げた論文により、主要な解決を見た。解の最大点の挙動について、定常状態を表す楕円型方程式の解の最大点の位置をもとに解明することができた。同時に時間減衰評価も得、これに関しては、劣臨界と臨界の場合、空間次元が2次元か3次元以上かで異なることを明らかにした。劣臨界の場合は、 で明らかにしたが、臨界の場合は、論文 で明らかにし、2次元の場合は、論文 で扱っている。

(2)楕円型方程式の解構造については、特異性を持つ解の一意性(ユークリッド空間類似ではあるが)を台湾の研究者のWu, Chen, Chernらとの論文 で解明し、球面上の領域での固有値の分布については、 で、双曲空間での解構造については、C. Badle との共同研究を元に、 と で解明することができた。これらの成果を元に、時間発展問題の解の挙動について、基礎的な結果が得られることと考えている。

5. 主な発表論文等  
(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計7件)

Kabeya Yoshitsugu, Kawakami Tatsuki, Kosaka Atsushi, Ninomiya Hirokazu, Eigenvalues of the Laplace-Beltrami operator on a large spherical cap under the Robin problem. Kodai Mathematical Journal 査読有り  
37巻 2014, 620--645.  
<http://www.math.titech.ac.jp/~tosho/Journal/info-j.html>

Wu Yen-Lin, Chen Zhi-You, Chern Jann-Long, Kabeya Yoshitsugu, Existence and uniqueness of singular solutions for elliptic equation on the hyperbolic space. Communications on Pure and Applied Analysis 査読有り  
13巻 2014, 949--960.  
<http://dx.doi.org/10.3934/cpa.2014.13.949>

Ishige Kazuhiro, Kabeya Yoshitsugu Decay rate of  $L_q$  norms of critical Schrodinger heat semigroups. Springer INdAM Series 査読有り  
2巻 2013, 165--178.  
[http://dx.doi.org/10.1007/978-88-470-2841-8\\_11](http://dx.doi.org/10.1007/978-88-470-2841-8_11)

Kabeya Yoshitsugu A Unified approach to Matukuma type equations on the hyperbolic space or on a sphere. Discrete and Continuous Dynamical Systems, Supplements 査読有り  
1巻, 2013, 385--391.  
<http://www.aims sciences.org/journals/displayArticlesnew.jsp?paperID=9223>

Bandle Catherine, Kabeya Yoshitsugu, On the positive, "radial" solutions of a semilinear elliptic equation in  $\mathbb{H}^n$ . Advances in Nonlinear Analysis 査読有り  
1巻, 2012, 1--25.  
<http://dx.doi.org/10.1515/ana-2011-0004>

Ishige Kazuhiro, Kabeya Yoshitsugu,  $L_p$  norms of nonnegative Schrodinger heat semigroup and the large time behavior of hot spots. Journal of Functional Analysis 査読有り  
262巻 2012, 2695--2733.  
<http://dx.doi.org/10.1016/j.jfa.2011.12.024>

Ishige Kazuhiro, Kabeya Yoshitsugu, Hot spots for the two dimensional heat equation with a rapidly decaying negative potential.

Discrete and Continuous Dynamical Systems Series S 査読有り  
4巻 2011, 833--849.  
<http://www.aims sciences.org/journals/home.jsp?journalID=15>

[学会発表](計19件)

大阪大学情報学研究科第11回情報数理学セミナー(2014年11月27日, 大阪大学情報学研究科, 吹田市)

壁谷 喜継

球面上での領域のラプラス・ベルトラミ作用素と関連する非線形問題

数学と現象(Mathematics and Phenomena) in Miyazaki 2014 (2014年11月15日 宮崎大学, 宮崎市)

壁谷 喜継

球面上での領域のラプラス・ベルトラミ作用素と関連する非線形問題

RIMS Workshop on Shapes and other properties of solutions of PDEs (Kyoto, Japan, 2014年11月5日)

Y. Kabeya

Solutions to the equation of the scalar-field type on a large spherical cap.

International Symposium on Applied Analysis (Zurich, Switzerland, 2014年6月11日)

Y. Kabeya

Eigenvalues of the Laplace-Beltrami operator on a spherical cap and related topics.

九州函数方程式セミナー(2014年5月30日, 福岡大学セミナーハウス, 福岡市)

壁谷 喜継

球面でのラプラス・ベルトラミ作用素と関連する非線形問題

名古屋大学微分方程式セミナー (2014年5月19日, 名古屋大学多元数理研究科, 名古屋市)

壁谷 喜継

Eigenvalues of the Laplace-Beltrami operator on a spherical cap and related nonlinear problems

PDE Seminar (國立中央大学, 中壢市, 2013年12月18日)

Y. Kabeya

Bifurcation diagrams of a nonlinear elliptic equation on a spherical cap

NTU and NCTS/TPE seminar on PDE (台湾大学, 台北市, 台湾, 2013年12月16日)

Y. Kabeya

Bifurcation diagrams of a nonlinear elliptic equation on a spherical cap

20th Microlocal Analysis and Classical Analysis (京都大学理学研究科, 京都市 2013年11月20日)

Y. Kabeya

Bifurcation diagrams of the nonlinear elliptic equation of the scalar-field type on a spherical cap

Applied Mathematics Seminar (Zurich, Switzerland, 2013年9月18日)

Y. Kabeya

A unified approach to nonlinear elliptic problems on the hyperbolic space or on the sphere

2013 Workshop in Nonlinear Equations in Population Biology (Shanghai, 中国, 2013年5月18日)

Y. Kabeya

Non-azimuthal solutions to a nonlinear elliptic equation on a spherical cap

International Workshop on Stationary Problems in Nonlinear Partial Differential Equations (佐賀大学工学部, 佐賀市, 2013年1月25日)

Y. Kabeya

Bifurcation diagrams of a nonlinear elliptic problem on a sphere

3rd Swiss-Japanese Seminar (Zurich, Switzerland, 2012年12月17日)

Y. Kabeya

Bifurcation diagrams of nonlinear elliptic problems on a sphere

9th AIMS Conference on Differential Equations (Orlando, USA, 2012年7月3日)

Y. Kabeya

Unified approach to Matukuma type equations on the hyperbolic space or on a sphere

29<sup>th</sup> PDE conference in Kyushu (九州大学, 福岡市, 2012年1月23日)

Y. Kabeya

Structures of positive solutions to nonlinear elliptic problems on the hyperbolic space or on a spherical cap

2011 NCTS Taiwan-Japan Joint Workshop on PDEs and Geometric Analysis (国家理論科学中心, 新竹市, 台湾, 2011年12月15日)

Y. Kabeya

Decay Estimates to a Linear Heat Equation with a Potential and Related Topics.

International Workshop on Modeling and Analysis of PDE Systems of Biological Processes (北京市, 中華人民共和国, 2011年10月21日)

Y. Kabeya

Large time behaviors of hot spots of solutions to a linear heat equation

日本数学会秋期総合分科会特別講演（信州大学，松本市2011年9月28日，松本）

壁谷喜継  
楕円型偏微分方程式に対する球対称解の構造

Korea-Japan International Workshop on PDE（釜山大学，釜山市，韓国，2011年6月22日）

Y. Kabeya

Structure of nonlinear elliptic equations on manifolds

〔図書〕（計0件）

〔産業財産権〕

出願状況（計0件）

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
出願年月日：  
国内外の別：

取得状況（計0件）

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
出願年月日：  
取得年月日：  
国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等

<http://www.ms.osakafu-u.ac.jp/~kabeya>

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

壁谷 喜継（KABEYA, Yoshitsugu）  
大阪府立大学・工学研究科・教授

研究者番号：70252757

### (2) 研究分担者

( )

研究者番号：

### (3) 連携研究者

石毛 和弘（ISHIGE, Kazuhiro）  
東北大学・理学研究科・教授

研究者番号：90272020