様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２６ 年　 ５ 月 ３０ 日現在

機関番号：３２６０７
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2011～2013
課題番号：２３５４０２４９
研究課題名（和文）三体問題における８の字解とＳａａｒｉ予想

研究課題名（英文）The figure-eight solution and Saari's conjecture in the-body problem

研究代表者
藤原　俊朗（Fujiwara, Toshiaki）

北里大学・一般教育部・教授

研究者番号：００１７３４９３
交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　1,700,000円、（間接経費）　510,000円

研究成果の概要（和文）：　平面三体問題のSaari予想を，ニュートンの重力の場合（引力が粒子間の距離の二乗に反比例）と強い力の場合（引力が粒子間の距離の三乗に反比例）について証明した．Saari予想とは，多体力学系において，ポテンシャルと系の大きさを表す慣性モーメントから作られた，系の大きさに依存しないある特定の量（Configurational measure)が一定の運動は，形が変わらない運動に限る，というものである．
研究は，この問題を記述する良い変数を見いだすところから始まり，三つの粒子の質量が等しい場合の証明は完成し出版した．一般の質量の場合の証明も完成間近で，今年6月に開催される国際会議で発表する．

研究成果の概要（英文）：　We proved the Saari's conjecture for the planar three-body problem under the Newton potential (the potential energy U is proportional to one over r, where r represents the mutual distance of bodies) and a strong force potential (U is proportional to one over r square).　The Saari's conjecture is a conjecture in the N-body problem which claims that if a certain quantity "the configurational measure" is constant then the motion is homograpic. For the three-body problem, it claims that the motions with constant cofigurational measure are only the Euler's collinear solutions and the Lagrange's equilateral triangle solution.
We started our research to find a good variables to discribe the motion of the shape, then we succesfully proved the conjecture for equal masses case. The results are published. Recently, we finally proved the conjecture for general masses case. I will give a talk for this new result in a international conference in Jun 2014.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：力学系　三体問題　Saari予想　等質量　一般の質量

1．研究開始当初の背景

(1) Saari 予想とは，重力相互作用をする多体系において configurational measure と呼ばれる量 μ が一定の運動は，粒子相互の配置が相似形を保ちながら，回転や全体の大きさが変わるだけの運動であると主張するものである．三体問題の場合は，μ が一定の運動は，Euler の直線解と Lagrange の正三角形解のみであると主張する．

Configurational measure の定義は，質点 i の質量を m_i，質点 i と j の間の距離を r_{ij} として，慣性モーメント $I=\sum_{i\neq j} m_i m_j r_{ij}^2/\sum_k m_k$，ポテンシャル関数 $U=\sum_{i\neq j} m_i m_j/r_{ij}^{\alpha}$ を用いて，

$$\mu=I^{\alpha/2}U$$

である．現実のポテンシャル関数は $\alpha=1$ であるが，ここではより一般化して $\alpha>0$ を考える．

上の定義からわかるように，configurational measure μ は回転やサイズの変換に対して不変であるので，多体系の配置の形だけに依存する関数である．したがって，運動の間形が変わらない Euler の直線解や Lagrange の正三角形解で μ が一定なことは明らかである．Saari の予想は，逆も真であることを主張するものである．図 1 参照．

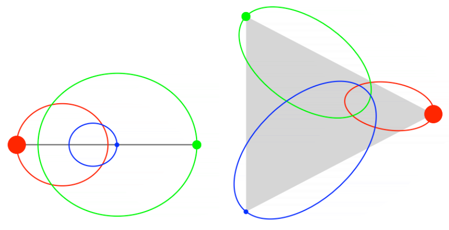

図 1　左：Euler の直線解，右：Lagrange の正三角形解．三体問題の Euler 解や Lagrange 解では μ は一定である．Saari 予想は逆も真であると主張する．

(2) 我々が研究を開始した当時にわかっていたことは，$\alpha=1$ の場合について，慣性モーメント I が一定なら，U も一定であることが簡単にわかる．その強い仮定のもとに Moeckel[1, 2] が一般の質量の三体問題について Saari 予想を証明した．

また，筆者を含む研究者ら (Diacu, Fujiwara, Pérez-Chavela and Santprete)[3] が，三体問題のいくつかの簡単な場合や，等質量のいくつかの場合に Saari 予想が正しいことを証明した．

2．研究の目的

(1) Newton が 1867 年に力学系の運動方程式を見いだしてから既に 300 年以上が経過しているが，未だに多くの問題が理解されずに残っている．Saari 予想は，重力多体系を理解する際の一つの目標となる．我々の研究の目的は，多体系の “形” を記述する変数として何を使うのが良いか，形の運動を記述する方程式はいかなるものか，そして形変数の関数として書かれた configurational measure μ が一定の運動はいかなるものかを理解することである．

3．研究の方法

(1) 形を記述する変数について：この研究を開始した際には，筆者が Diacu ら [3] とともに見いだした形変数を用いていたが，同時に他に良い変数がないかを常に模索していた．そんな折，Montgomery から筆者にプレプリント [4] が送られてきた．その中で Montgomery と Moeckel は多体系の Jacobi 座標から導かれた形変数 ζ を用いていた．

$$\zeta=\frac{3}{2}\frac{q_3}{q_1-q_2}.$$

この変数の幾何学的な解釈は図 2 参照．我々は即座にその変数の重要性を理解し，その変数と慣性モーメントや回転の自由度を一般化座標とする Lagrangean を書き下し，運動方程式を書き下した．その中にはもちろん形変数の運動方程式も含まれる．

(2) 必要条件：一方で configurational measure μ が一定の運動は，時間についてのある二階微分方程式を満たす．それが運動方程式と矛盾しないための必要条件を導くことができる．このような必要条件

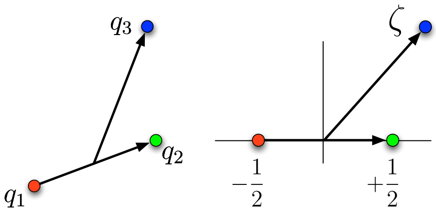

図 2　左：三体の実際の位置座標が $q_k \in \mathbb{C}$，$k = 1, 2, 3$．右：三体がつくる三角形を相似変形して q_1 を $-1/2$ に，q_2 を $1/2$ に一致させた時の q_3 の位置が形変数 $\zeta \in \mathbb{C}$ である．

は以前から様々な方法で得られていたが，非常に複雑な長々とした式で表されるものなので，取り扱いが非常に難しかった．文献 [3] 参照．今回得られたものも同様に複雑な長々としたものであったが，今回は以下に述べるように，形変数の幾何学的素性がはっきりわかったので一気に証明が進んだ．

(3) リーマン球面：形変数の Lagrangean を書き下して気づいたことは，この運動はリーマン球面上の運動とみなすのが自然であるということである．というのは，形変数の運動エネルギーは

$$\frac{\frac{4}{3}|d\zeta/dt|^2}{(1+\frac{4}{3}|\zeta|^2)^2}$$

に比例するのだが，これはまさしくリーマン球面上の速さの二乗に等しい．図 3 参照．我々はこのことを研究の過程で見つけたのだが，実は Hsiang[5, 6] らによって既に見つけられていたことであった．

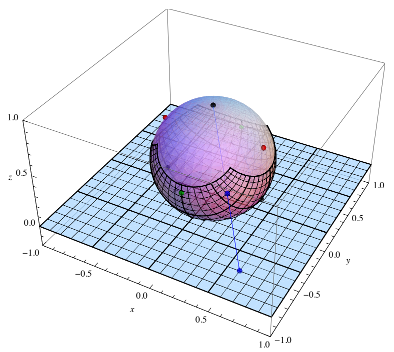

図 3　形変数 ζ の複素平面と，そのリーマン球面．形変数の運動エネルギーは，まさしくリーマン球面上の速さの二乗に比例する．

そこで，上記の必要条件をこのリーマン球面上のスカラー量 $\Delta\mu$ や $|\nabla\mu|^2$ などで書き下してみると素性がよくわかった．

(4) 対称式：三体の質量が等しい場合には，3 つの粒子の位置の入れ替えに対して系は不変である．それに対応して，$\alpha = 1, 2$ の場合には，上記のスカラー量，ひいてはそれらで表されている必要条件は μ を構成する 3 つの項の対称式で表されることになる．したがって，以下の 3 つの基本対称式で表される．$\mu = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3$, $\nu = \mu_1\mu_2 + \mu_2\mu_3 + \mu_3\mu_1$, $\rho = \mu_1\mu_2\mu_3$．実はこのうちの 2 つだけが独立である．こうして我々は，上記の必要条件を μ と ρ だけで書き表すことができた．μ は一定であると仮定しているので，変動するのは ρ の 1 変数のみとなった．

必要条件が 1 変数 ρ の関数となったので，それが満たされるかどうかを簡単に調べることができるが，それは一般には満たされることはなく Euler の直線解や Lagrange の正三角形解の場合のみ満たされることを示すことができた．これは Saari 予想の証明である．

4．研究成果

(1) 我々は等質量平面三体問題についての Saari 予想を現実の Newton ポテンシャルの場合 $\alpha = 1$ と強い力のポテンシャルの場合 $\alpha = 2$ について，肯定的に証明した．その証明は下記にしめす 2 つの論文として出版した．また各地で開かれる国際会議で発表した．

(2) 当初の目的であった，形を記述する良い変数を見つけることができた．また，形変数の運動を記述する運動方程式を書き下すこともできた．しかし，これらは我々のオリジナルではなく，Montgomery と Mockel[4] によって導かれたものであった．

(3) また，形変数の運動がリーマン球面上の運動であることを再発見したが，これも既に Hsiang ら [5, 6] によって導かれた結果であった．

このように (2)，(3) は他の研究者からもたらされたものや，既に知られていたことを再発見ものだが，それらの上に我々独自の結果である Saari 予想の証明 (1) を築き上げることができた．

５．主な発表論文等（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 2 件）

1) <u>Toshiaki Fujiwara</u>, Hiroshi Fukuda, Hiroshi Ozaki and Tetsuya Taniguchi, *Saari's homographic conjecture for planar equal-mass three-body problem in Newton gravity*, J. Phys. A: Math. Theor. **45** (2012) 345202, 査読あり
doi:10.1088/1751-8113/45/34/345202

2) <u>Toshiaki Fujiwara</u>, Hiroshi Fukuda, Hiroshi Ozaki and Tetsuya Taniguchi, *Saari's homographic conjecture for planar equal-mass three-body problem under a strong force potential*, J. Phys. A: Math. Theor. **45** (2012) 045208, 査読あり
doi: 10.1088/1751-8113/45/4/045208

〔学会発表〕（計 5 件）

1) <u>Toshiaki Fujiwara</u>, Hiroshi Fukuda, Hiroshi Ozaki and Tetsuya Taniguchi, *Saari's conjecture for planar 3-body problem*, "2013 NCTS Taiwan-Japan Symposium on Celestial Mechanics and N-Body Dynamics", Hsinchu, Taiwan, Dec. 6, 2013

2) <u>Toshiaki Fujiwara</u>, Hiroshi Fukuda, Hiroshi Ozaki and Tetsuya Taniguchi, *Saari's homographic conjecture for planar equal mass and general mass three-body problem under a strong force potential*, "International Conference: AMMCS-2013", Waterloo, Canada, Aug. 29, 2013

3) <u>Toshiaki Fujiwara</u>, Hiroshi Fukuda, Hiroshi Ozaki and Tetsuya Taniguchi, *Saari's homographic conjecture for planar equal mass three-body problem*, "Mathematical Congress of the Americas 2013", Guanajuato, Mexico, Aug. 6, 2013

4-I) <u>Toshiaki Fujiwara</u>, Hiroshi Fukuda, Hiroshi Ozaki and Tetsuya Taniguchi, *Proof of Saari's Homographic Conjecture for Planar Equal-Mass Three-Body Problem I*, "International Congress on Mathematical Physics ICMP12", Aalborg, Denmark, Aug. 7, 2012

4-II) <u>Toshiaki Fujiwara</u>, Hiroshi Fukuda, Hiroshi Ozaki and Tetsuya Taniguchi, *Proof of Saari's Homographic Conjecture for Planar Equal-Mass Three-Body Problem II*, "International Congress on Mathematical Physics ICMP12", Aalborg, Denmark, Aug. 7, 2012

4-III) <u>Toshiaki Fujiwara</u>, Hiroshi Fukuda, Hiroshi Ozaki and Tetsuya Taniguchi, *Proof of Saari's Homographic Conjecture for Planar Equal-Mass Three-Body Problem III*, "International Congress on Mathematical Physics ICMP12", Aalborg, Denmark, Aug. 7, 2012

5) <u>Toshiaki Fujiwara</u>, Hiroshi Fukuda, Hiroshi Ozaki and Tetsuya Taniguchi, *Motion in shape for planar three-body problem*, "THE SYMPOSIUM ON CELESTIAL MECHANICS 天体力学N体力学研究会 2011" Osaka, Japan, Sept. 2, 2011.

〔その他〕
ホームページ等
http://www.clas.kitasato-u.ac.jp/~fujiwara/nBody/nbody.html

６．研究組織

(1) 研究代表者
藤原　俊朗 （FUJIWARA Toshiaki）
北里大学・一般教育部・教授
研究者番号：00173493

参考文献

[1] R. Moeckel, *A computer-assisted proof of Saari's conjecture for the planar three-body problem*, Trans. Amer. Math. Soc. **357**, 3105–3117 (2005)

[2] R. Moeckel, *A proof of Saari's conjecture for the three-body problem in R^d*, preprint (2005)

[3] F. Diacu, T. Fujiwara, E. PérezChavela and M. Santoprete, *Saari's homographic conjecture of the three-body problem*, Trans. Am. Math. Soc. **360**, 6447–73 (2008)

[4] R. Moeckel and R. Montgomery, *private communications*

[5] W-Y. Hsiang and E. Straume, *Kinematic geometry of triangles with given mass distribution* PAM-636Report (Berkeley, CA: University of California),1995

[6] W-Y. Hsiang and E. Straume, *Kinematic geometry of triangles and the study of the three-body problem*, arXiv:math-ph/0608060, 2006