

**科学研究費助成事業 研究成果報告書**

平成 28 年 6 月 9 日現在

機関番号：32686

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2011～2015

課題番号：23540252

研究課題名(和文)可積分系の視点からの特殊関数の拡張

研究課題名(英文)Extension of special functions from the viewpoint of integrable systems

研究代表者

寛 三郎 (KAKEI, Saburo)

立教大学・理学部・教授

研究者番号：60318798

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,700,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では、可積分系、特殊関数の理論を拡張し、その応用範囲を広げることを目的とした。主な結果としては次が挙げられる。

(1) Goldstein-Petrichによる平面曲線の等周変形と戸田格子階層との関係を明らかにし、それを通してアフィン・リー代数の実型との対応を考察した。(2) ヤング図形の組合せ論に現れる臙装配置(rigged configuration)について、ソリトン・オートマトンの観点から研究を行った。その結果、時間発展の線形化についての初等的別証明を与えることに成功した(論文は現在準備中)。

これら以外にも、微分幾何学、組合せ論に関する結果が得られており、現在も研究を進めている。

研究成果の概要(英文)：This research project aims to extend the theory of integrable systems and special functions. We have focused mainly on applications to differential geometry and combinatorics, and obtained the following results;

(1) Goldstein and Petrich introduced a hierarchy of equations that governs isoperimetric deformation of plane curves. We have revealed that the Goldstein-Petrich hierarchy is indeed a reduced case of the Toda lattice hierarchy. (2) We have studied rigged configurations from the viewpoint of soliton cellular automaton. We have obtained alternative proof of the linearization property of the time-evolution, which is simpler than the known proofs.

We have obtained still other preliminary results that are related to applications of integrable systems to differential geometry and combinatorics. We will investigate them further in near future.

研究分野：数理物理学

キーワード：可積分系

## 1. 研究開始当初の背景

特殊関数を拡張する試みとして、多変数化、離散化、非線形化など、様々なアプローチが試みられてきた。これまでの研究で、それらの拡張された特殊関数が、可積分系の研究に様々な形で表れている。そこで本研究では、可積分系の持つ豊かな代数的構造を利用して、特殊関数の整理・拡張を行うことを構想した。

## 2. 研究の目的

何を持って「特殊関数」とするかに数学的に明確な定義はないが、本研究では、何らかの(物理的, 数学的)現象を記述する際に普遍的に現れる関数を、「特殊関数」と呼ぶことにしたい。可積分系の持つ豊かな代数的構造を利用して、特殊関数の整理・拡張を行うことを通して、一見すると無関係な複数の分野にまたがって現れる「特殊関数」的な構造の例を増やすことが本研究の主目的である。

## 3. 研究の方法

研究の出発点として、研究代表者が研究経験を積み重ねてきた題材において、そこに現れる特殊関数的構造を調べるといった手法をとった。そうして見えてくる構造に関して、連携研究者、研究協力者と密接に連絡を取りつつ視野を広げていくという方法で進めた。

## 4. 研究成果

本研究では、可積分系、特殊関数の理論を拡張し、その応用範囲を広げることが目的とした。研究代表者による主な結果としては、微分幾何学における曲線の運動の明示的記述、及び組合せ論における諸量と離散可積分系との関係の解明などが得られた。今後の発展に向けて特に重要度が高いと思われる結果を列挙する。

(1) Goldstein-Petrichによる平面曲線の等周変形と戸田格子階層との関係を明らかにした。その対応を通して、アフィン・リー代数の実型との対応を考察した。ここで現れているのはsl2という最も簡単な場合であるので、他の型への拡張が期待できる。

(2) ヤング図形の組合せ論に現れる臙装配置(rigged configurations)について、超離散可積分系の一つであるソリトン・オートマトンの観点から研究を行った。その結果、時間発展の線形化についての初等的別証明を与えることに成功した(論文は現在準備中)。この観点を深め、ヤング図形の組合せ論と関連する諸量を離散可積分系の視点から捉え直すことで、新たな発展が期待できる。

これら以外にも、微分幾何学、組合せ論、超離散系に関する準備的な結果が得られており、現在も研究を進めている。連携研究者のWillcoxは超離散可積分系の研究を進め、従来の系を拡張する結果を得た。また、連携研究者の斉藤は、柏原クリスタルに関する研究を進め、特にアフィンA型の場合の結果を

まとめた。今後の研究で、これらの結果の間に直接の結びつきを見出すことが期待できる。

前述の準備的な結果を進めること、及び連携研究者の研究結果と結び付けることについては、本研究計画の最終年度の応募で新規に応募し採択された研究計画「諸分野に現れるタウ関数の構造」(課題番号: 16K05184, 研究種目: 基盤研究(C), 平成28年度~平成32年度)に引き継がれている。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計12件)

(1) K. Kajiwara and S. Kakei, Toda lattice hierarchy and Goldstein-Petrich flows for plane curves, Comment. Math. Univ. St. Pauli, Vol.64, No.1 (2015), 29-45 (査読有)

DOI: 10.14992/00011497

(2) R. Willox, A. Ramani and B. Grammaticos, Solutions of the lattice sine-Gordon equation and the solitons of its cellular automaton, J. Phys. A, Vol.47, No.12, 2014, 125202, 12 pages (査読有)

DOI: 10.1088/1751-8113/47/12/125202

(3) 渡邊拓弥, 箕三郎, ドメイン壁境界条件下での対称性付き6頂点模型の分配関数とタウ関数, 応用力学研究所研究集会報告 25A0-S2, 2014, 157-162 (査読有)

[http://catalog.lib.kyushu-u.ac.jp/handle/2324/1448883/Article\\_No\\_25.pdf](http://catalog.lib.kyushu-u.ac.jp/handle/2324/1448883/Article_No_25.pdf)

(4) 田村律, 箕三郎, 6角形領域における菱形タイリングの分配関数とタウ関数, 応用力学研究所研究集会報告 25A0-S2, 2014, 163-168 (査読有)

[http://catalog.lib.kyushu-u.ac.jp/handle/2324/1448884/Article\\_No\\_26.pdf](http://catalog.lib.kyushu-u.ac.jp/handle/2324/1448884/Article_No_26.pdf)

(5) B. Grammaticos, A. Ramani and R. Willox, A sine-Gordon cellular automaton and its exotic solitons, J. Phys. A, Vol.46, No.14, 2013, 145204, 23 pages (査読有)

DOI: 10.1088/1751-8113/46/14/145204

(6) S. Naito, D. Sagaki and Y. Saito, Toward Berenstein-Zelevinsky data in affine type A, Part III: Proof of the connectedness, Springer Proc. Math. Stat. Vol.40, Springer, Heidelberg, 2013, 361-402 (査読有)

DOI: 10.1007/978-1-4471-4863-0\_15

(7) 三谷浩将, 箕三郎, Ralph Willox, 拡張されたTzitzeica方程式と中心等積アフィン

曲面,応用力学研究所研究集会報告 24A0-S3, 2013, 128-133 (査読有)  
[http://catalog.lib.kyushu-u.ac.jp/handle/2324/27180/Article\\_No\\_20.pdf](http://catalog.lib.kyushu-u.ac.jp/handle/2324/27180/Article_No_20.pdf)

(8) R. Willox, A. Ramani, J. Satsuma and B. Grammaticos, A KdV cellular automaton without integers, Contemp. Math. Vol. 580, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2012, 135-155 (査読有)  
DOI: 10.1090/conm/580/11495

(9) S. Naito, D. Sagaki and Y. Saito, Toward Berenstein-Zelevinsky data in affine type A, part II: Explicit description, Contemp. Math. Vol. 565, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2012, 185-216 (査読有)  
DOI: 10.1090/conm/565

(10) S. Naito, D. Sagaki and Y. Saito, Toward Berenstein-Zelevinsky data in affine type A, part I: Construction of the affine analogs, Contemp. Math. Vol. 565, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2012, 143-184 (査読有)  
DOI: 10.1090/conm/565

(11) 大川 豪, 筧三郎, 区分線形型 FitzHugh-Nagumo 方程式の逆超離散化, 応用力学研究所研究集会報告 23A0-S7, 2012, 196-201 (査読有)  
[http://catalog.lib.kyushu-u.ac.jp/handle/2324/23476/Article\\_No\\_30.pdf](http://catalog.lib.kyushu-u.ac.jp/handle/2324/23476/Article_No_30.pdf)

(12) 三澤 彰宏, 筧三郎, 連立 Euler-Poisson-Darboux 方程式の対称性, 応用力学研究所研究集会報告 23A0-S7, 2012, 202-207 (査読有)  
[http://catalog.lib.kyushu-u.ac.jp/handle/2324/23477/Article\\_No\\_31.pdf](http://catalog.lib.kyushu-u.ac.jp/handle/2324/23477/Article_No_31.pdf)

[学会発表](計10件)

(1) Saburo Kakei, Linearization of the box-ball system: an elementary approach, Infinite Analysis 16 “New Developments in Integrable Systems”, 2016年3月27日, 大阪市立大学(大阪府大阪市)

(2) 筧三郎, 箱玉系の線形化に対する初等的アプローチ, 日本数学会 2016 年度年会, 2016年3月19日, 筑波大学(茨城県つくば市)

(3) Saburo Kakei, Linearization of the box-ball system: an elementary approach, Workshop “Topics on Tropical Geometry and Integrable Systems”, 2015年12月23日, 青山学院大学(神奈川県相模原市)

(4) Ralph Willox and Saburo Kakei,

Ultradiscrete inverse scattering and combinatorics, The 8th International Congress on Industrial and Applied Mathematics (ICIAM2015), 2015年8月11日, 北京(中国)

(5) Saburo Kakei, Jeu de taquin slide and ultra-discrete KP equation, The 8th International Congress on Industrial and Applied Mathematics (ICIAM2015), 2015年8月11日, 北京(中国)

(6) Saburo Kakei, Hirota bilinear method and Hermite ensemble, Workshop “Fluctuation and Correlation in Stochastic Systems”, 2014年10月15日, 中央大学理工学部(東京都文京区)

(7) 筧三郎, 梶原健司, 変形 KdV 階層による平面曲線の運動と戸田階層, 日本数学会 2014 年度秋季総合分科会, 2014年9月25日, 広島大学(広島県東広島市)

(8) 筧三郎, 離散可積分系入門, 離散可積分系・離散微分幾何チュートリアル 2014, 2014年2月22日, 九州大学(福岡県福岡市)

(9) 筧三郎, Negative flows of Toda hierarchy and motion of plane curve, 研究集会 “Around Sato's Theory on Soliton Equations”, 2013年12月14日, 津田塾大学(東京都小平市)

(10) 筧三郎, 離散可積分系入門, 離散可積分系・離散微分幾何チュートリアル 2012, 2012年2月22日, 九州大学(福岡県福岡市)

[図書](計2件)

(1) 筧三郎(編), 九州大学マス・フォア・インダストリ研究所, 非線形数理モデルの諸相: 連続, 離散, 超離散, その先(マス・フォア・インダストリ研究 No.3), 2015, 208  
[http://www.imi.kyushu-u.ac.jp/files/imi\\_publishattachment/file/math\\_551a22430c08b.pdf](http://www.imi.kyushu-u.ac.jp/files/imi_publishattachment/file/math_551a22430c08b.pdf)

(2) 井ノ口順一, 太田泰宏, 筧三郎, 梶原健司, 松浦望(編), 九州大学マス・フォア・インダストリ研究所, 離散可積分系・離散微分幾何チュートリアル 2012, MI レクチャーノート Vol.40, 2012, 154  
<http://catalog.lib.kyushu-u.ac.jp/ja/recordID/25116?hit=1&caller=xc-search>

[産業財産権]

出願状況(計0件)  
なし

取得状況(計0件)

なし

〔その他〕  
ホームページ等  
なし

#### 6. 研究組織

##### (1) 研究代表者

笈 三郎 (KAKEI, Saburo)  
立教大学・理学部・教授  
研究者番号：60318798

##### (2) 研究分担者

なし

##### (3) 連携研究者

斉藤 義久 (SAITO, Yoshihisa)  
東京大学・数理科学研究科・准教授  
研究者番号：20294522

W I L L O X , R a l p h  
東京大学・数理科学研究科・教授  
研究者番号：20361610