

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 3 日現在

機関番号：14301

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2011～2013

課題番号：23540253

研究課題名(和文)非線形系の大域解析学としての展開

研究課題名(英文)Toward a Global Analysis for Nonlinear System of Partial Differential Equations

研究代表者

西田 孝明(Nishida, Takaaki)

京都大学・情報学研究科・名誉教授

研究者番号：70026110

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,700,000円、(間接経費) 1,110,000円

研究成果の概要(和文)：重力の下で水平な帯状領域を満たす一般の圧縮性流体を下から一様に熱する時の流体運動の問題を解析した。平衡解は熱伝導解であり、すべてのパラメータ領域で存在しているが、下からの熱を増大させるとその臨界 Rayleigh 数から不安定化し、パターン形成が起ることを温度勾配に対して一様に示した。温度勾配を零に近づけた極限は、Oberbeck-Boussinesq 方程式の cell 状のパターンである事も示した。
Hamilton 力学系の Jauslin-Kreiss-Moser モデル(Burgers モデル)の周期解、カオス解を解析した。

研究成果の概要(英文)：Heat convection problems of compressible, viscous and heat-conductive fluids are investigated. Stationary bifurcations are proved to occur from the equilibrium state (heat conduction solution), when the Rayleigh number exceeds the critical value. They correspond to the pattern formation of the roll-type solution, the hexagonal cell and the mixed type solution. The bifurcation occurs uniformly with respect to the parameter which corresponds to the gradient of temperature and they converge to those of the Oberbeck-Boussinesq equation as the parameter tends to zero.
Jauslin-Kreiss-Moser model of Hamilton Mechanics is investigated. It is a periodically forced Burgers equation with the periodic boundary condition.
The periodic in time solutions are constructed by the Lax-Friedrichs scheme and the periodic, chaotic solutions and the Aubry-Mather set are obtained numerically.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・数学一般

キーワード：大域的解析 非線形偏微分方程式 力学系 熱対流問題 圧縮性粘性熱伝導性流体 Jauslin-Kreiss-Moser モデル

1. 研究開始当初の背景

(1) 熱対流問題のうち、Oberbeck-Boussinesq 近似方程式系を用いた分岐解析などと比べて、圧縮性粘性流体の熱対流問題の解析的取扱いは、その系の複雑さもあって数少ない。即ち、圧縮性粘性熱伝導性流体の熱対流問題の解析は、Spiegel (1965) による基本的な研究以来その質量保存則の非線形性からくる困難のためにほとんど手が付けられていなかった。Pyi Aye and T. Nishida (1998) は、重力のもとで水平な帯状領域にある圧縮性流体が下から一様に熱せられる時の平衡解の周りでの線形系の固有値を数値的に調べ、臨界 Rayleigh 数 R_m に関して次の表を得ていた。

パラメータ： $\gamma = 5/3$, $c_p = 1$, $c_v = 0.6$,
 $m = 1.4$, $P_r = 1$ and $b = 0.04$.

L			R_0	R_m
1.5	2.2614	0.0	19.0653	754.139
2.5	2.2357	0.0	11.5268	691.377
4.5	2.2258	0.0	6.6749	667.851
8.5	2.2226	0.0	3.7447	660.399
16.5	2.2217	0.0	2.0581	658.276
32.5	2.2215	0.0	1.1176	657.708
64.5	2.22146	0.0	0.60306	657.561
128.5	2.22145	0.0	0.32429	657.523
Bouss.	2.22144	0.0		657.511

ここで λ は、線形系の (臨界) 固有値であり、

$$L = \frac{T_u + T_l}{2\beta d} , T_u, T_l \text{ は上下の温度, } T_l \text{ は温度}$$

勾配, d は層の厚さ

これによって Rayleigh 数 Ra が、この臨界 Rayleigh 数を越えると定常分岐によって cell 状のパターンが形成されることが示唆されていた。質量保存則の強い非線形性によりその証明は成されていなかった。さらに、 L が増大した極限では、そのパターン形成が最下段の Oberbeck-Boussinesq 方程式のそれに収束していることも示唆していた。

(2) Hamilton 力学系の周期解、準周期解、カオス解などを調べる簡単なモデルに、Jauslin-Kreiss-Moser (1999) があり、action-angle 変数で書かれたそれは周期境界条件の下で時間周期的外力を持つ Burgers

方程式 (非線形双曲型保存則) である。その時間周期解の構成、Hamiltonian の周期解、準周期解、カオス解などの構成、その不変集合 (Aubry-Mather 集合) などの構成を差分法で直接行いたい。

2. 研究の目的

(1) 力学系・非線形双曲型方程式・流体方程式系等を主な対象として、それらに典型的な問題でありながら弱非線形理論・一次分岐理論などによる扱いを越えているため未解決である重要な問題を明確に定式化し、その非線形性と物理的に自然なパラメーターに着目して、解空間における定常解・周期解のみならず一般の解の時間的遷移過程を調べるための解空間の大域的な特異性・構造とその変化を解明する。

3. 研究の方法

(1) 非線形常微分・偏微分方程式系の解空間の大域的な構造を解析する理論の構築に向けた大域解析学的研究であり、そこで力学系理論、偏微分方程式論、非線形解析学、数値解析学等の各分野の発展を計り、それらを総合し、計算機援用解析を含んだ大域解析学の新しい方法を展開する。

(2) 圧縮性粘性流体の熱対流問題での共同研究者である Ferrara 大学 (イタリア) の Padula 教授を訪問し研究連絡、共同研究をすることと Bedlewo (ポーランド) で行われる Parabolic and Navier-Sokes equations に関する国際研究集会に参加し講演し、研究連絡を行う。圧縮性粘性流体の分岐問題の共同研究者である隠居教授 (九州大学) と研究連絡する。

4. 研究成果

(1) 作用・角変数で記述した 2 自由度の Hamilton 力学系に対応する Hamilton-Jacobi 方程式の一つとして、Jauslin-Kreiss-Moser が考察した系は、周期境界条件の下に時間周期的な外力のある Burgers 方程式と同値になる。この系の周期解の存在を各モーメント毎に Lax-Friedrichs 差分法で構成的に証明した。その Poincaré 写像を調べ、各周期時刻での解のグラフの滑らかさ、連続性・不連続性を見ることにより、Hamilton 系の準周期解がそのグラフ上に乗っていて存続している場合と乗らずにカオス解になっている場合を詳しく調べた。更に、カオス解になっている場合にもそれらの中に在る不変集合

である Aubry-Mather 集合を差分法で数値的に構成する方法を提案し、その集合を求めるとともに、解のモーメントの関数である effective Hamiltonian を数値的に求め、その導関数(回転数と呼ばれ、階段状の単調増大な連続関数である。)を求めた。論文

(2) 重力の下で水平な帯状領域にある圧縮性粘性熱伝導性流体の底面を一様に熱する時の熱対流問題を扱う。この一般の熱対流問題を Spiegel に従って無次元化すると Rayleigh 数と $L = (Tu + Tl) / (2d)$ が主たるパラメーターとなる。 $Tu; Tl$ は上下の水平な境界での温度、 d は領域の厚さである。平衡解(熱伝導解)への外力、熱源等による摂動を加えたとき、Rayleigh 数が臨界 Rayleigh 数より小さい時に、その定常解の存在を $L > L_0$ に対して一様に示した。更に、 L を大きくした極限では、いわゆる Oberbeck-Boussinesq 方程式の定常解に収束している事を示した。未知関数として、圧力、速度、温度をとり、適当な scale 変換を用い、質量保存則の強い非線形性を克服する事によって得られた。永らく懸念であった圧縮性粘性熱伝導性流体の熱対流問題と”非圧縮性” Oberbeck-Boussinesq 方程式系による熱対流問題の比較、近似性の証明の最初の段階を clear する事が出来た。論文

(3) 圧縮性粘性熱伝導性を持つ一般の流体の熱対流問題のうち分岐問題を調べた。上記と同じ定式化の下で同じ無次元化により、Rayleigh 数と L が主たるパラメーターである。平衡解は熱伝導解であり、すべてのパラメーター領域で存在しているが、Rayleigh 数を増大させる(下からの熱を増加させる)とその臨界 Rayleigh 数からそれは不安定化してパターン形成(ロール型、六角形型、混合型などの cell 状の定常渦)がおこる。これを $L > L_1$ に対して一様に証明した。更に、 L を大きくした極限では、いわゆる Oberbeck-Boussinesq 方程式の cell 状の定常解に収束していることを示した。未知関数として Oberbeck-Boussinesq 方程式にあわせ、圧力、速度と温度を取り、適当な scale 変換を用い、質量保存則の強い非線形性を輸送方程式を巧妙に用いることによって克服する事によって得られた。圧縮性流体の熱対流問題の分岐現象について、ある極限で”非圧縮性”流体の熱対流問題の Oberbeck-Boussinesq 方程式の分岐解が得られる事、即ち、後者の方程式が上記の意味で

の近似になっている事の正当性も示した事になる。論文

5. 主な発表論文等
(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計3件)

Takaaki Nishida, Mariarosaria Padula and Yoshiaki Teramoto

Heat convection of compressible viscous fluids. II.

Journal of Mathematical Fluid Mechanics, 15, 2013, 689-700, 有,

Doi:10.1007/s00021-013-0139-0

Takaaki Nishida, Mariarosaria Padula and Yoshiaki Teramoto

Heat convection of compressible viscous fluids. I.

Journal of Mathematical Fluid Mechanics, 14, 2012, 525-536, 有,

Doi:10.1007/s00021-012-0112-3

Takaaki Nishida and Kohei Soga

Difference Approximation to Aubry-Mather sets of the forced Burgers equation.

Nonlinearity, 25 (2012), 2401-2422, 有,

Doi:10.1088/0951-7715/25/9/2401

[学会発表](計6件)

Takaaki Nishida

Heat convection problems of compressible viscous fluids.

Kinetic Modeling and Related Equations,

Conference in Memory of Seiji Ukai

(招待講演), 2013年10月28日~2013年10月30日, Rakuyu Kaikan, Kyoto University

Takaaki Nishida

Heat convection problems of compressible viscous fluids.

International Conference on Nonlinear

Analysis: Evolutionary P.D.E. and Kinetic theory (招待講演),

2012年10月29日~2012年11月02日,

Institute of Mathematics, Taipei, Taiwan

Takaaki Nishida

Heat convection problems of compressible viscous fluids.

Parabolic and Navier-Stokes Equations (招待講演),

2012年09月02日~2012年09月08日,

Institute of Mathematics, Bedlewo, Poland

西田孝明

「圧縮性粘性流体の熱対流問題」
流体と気体の数学解析(招待講演),
2012年07月04日~2012年07月06日, 京
都大学数理解析研究所

Takaaki Nishida

*Hyperbolic conservation laws without the
convexity.*

Taiwan-Japan joint workshop on numerical
analysis and scientific computations (招
待講演),

2011 November 12, National Taiwan
University, Taiwan

Takaaki Nishida

*Burgers equation with time periodic
forcing terms.*

Analysis Seminar (招待講演),
2011 September 14, University of Ferrara,
Italia

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕
出願状況(計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

取得状況(計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

西田孝明 (NISHIDA Takaaki)
京都大学・大学院情報学研究科・名誉教授
研究者番号：70026110

(2) 研究分担者

()

研究者番号：

(3) 連携研究者 ()

研究者番号：