様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２８ 年　 ４ 月 １２ 日現在

機関番号：３４３０４
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2011～2015
課題番号：２３５４０２５４

研究課題名（和文）非線形拡散方程式における界面ダイナミクスと進行波の大域的解構造の研究

研究課題名（英文）A study of the global structure of interface dynamics and traveling waves in nonlinear diffusion equations

研究代表者
柳下　浩紀（YAGISITA, Hiroki）

京都産業大学・理学部・教授

研究者番号：８０３４９８２８

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,000,000円

研究成果の概要（和文）：非線形拡散方程式系の研究の基礎をなす線形の熱方程式についての研究を行って、ＫＰＰ-フィッシャー方程式やある臨界指数以上の指数をもつ藤田型の半線形熱方程式で報告されているような不規則長時間挙動が、１次元の線形熱方程式についてはスケーリングされた変数で解を観察することにより、その詳細が明らかになるということを示した。さらに、線形方程式で明らかになった長時間挙動と同様な結果が非線形方程式で成立する条件について検討を行った。

研究成果の概要（英文）：We researched on the linear heat equation underlying the study of systems of nonlinear diffusion equations and showed that, in the linear heat equation on the one-dimensional hole line, the details of irregular long-time behaviors such as has been reported in the KPP-Fisher equation and the semi-linear heat equation of Fujita type with super ciritical exponent. Furthermore, we researched on conditions for similar irregular long-time behaviors as ones revealed in the linear equation.

研究分野：数学解析

キーワード：非線形現象　非線形解析　拡散方程式

１．研究開始当初の背景

単独、あるいは連立の非線形拡散方程式で記述される拡散現象では、界面の動力学を支配する方程式が、形式的な漸近展開によって、空間内の曲面の発展方程式として導かれている。これらの方程式は、微分幾何学的には広い意味で平均曲率流方程式と呼ばれるものとなる。拡散現象が単独方程式で記述されている場合には、導出の数学的正当化がすでに多くの研究者の努力の結果、ほぼ満足のいく形で成功している。しかしながら、‘数学上の良い構造’を持たない一般の連立系に関しては、十分な数学的な理解が得られていない。また、FitzHugh-南雲方程式の２つの進行波が互いに向かい合っていると、その間の距離が離れている段階では波形と速度をほぼ一定に保ったままそれらは近づいていくのだが、最終的に進行波はともに消滅してしまうことが数値実験の結果から確認できる。しかし、このフォークロアを数学的に確認をすることは未だになされていない。

２．研究の目的

非線形の拡散現象を記述する放物型方程式に関して、その理解に重要な対象である界面と進行波のダイナミクスについて研究を行う。界面のダイナミクスについては、比較定理や変分構造を有さない一般の連立系に対して、界面ダイナミクスの縮約系として平均曲率流が現れることの数学的な理解を進めること、及び、進行波のダイナミクスについては、FitzHugh-南雲方程式、あるいは、類似の方程式の進行波の衝突消滅の数学的な理解を進めることが主な研究目的である。

３．研究の方法

非線形の拡散現象について、数学的理解を得ることが目的であるが、そのために研究の方法として、注目している現象が数学的に顕わになるような座標変換を行う時空間スケーリングの方法、及び、注目している現象に固有の特質が顕わになるような理想的な極限を考えて、“理想的な極限に近い状況”が実際に発生していることを示す（広い意味での）特異極限法などの研究手法を主に用いた。その他、種々の楕円型偏微分作用素のスペクトル解析の手法や無限次元力学系の幾何学的な定性的理論などを基本的な研究手法として用いた。

４．研究成果

非線形拡散方程式系の研究の基礎をなす線形の熱方程式についての研究を行って、ＫＰＰ‐フィッシャー方程式やある臨界指数以上の指数をもつ藤田型の半線形熱方程式で報告されているような不規則長時間挙動が、１次元の線形熱方程式についてはスケーリングされた変数で解を観察することにより、その詳細が明らかになるということを示した。さらに、線形方程式で明らかになった長時間挙動と同様な結果が非線形方程式で成立する条件について検討を行い、その結果、極一部の非線形方程式については同様の長時間挙動を示すことが期待できることがほぼ確実であるとの観察を得ることができた。

より具体的には、特に次のような成果を得た。

初等的なスケーリングの議論を用いて、本研究課題の研究代表者は、初期条件が有界で緩慢に変動するとき、１次元の全空間の上の熱方程式の初期値問題の時空間挙動を研究した。また、初期曲線が１次元の全空間の上のグラフによって表示される場合について、曲線短縮流についても、同様の研究を行った。

まず、１次元の全空間の上の熱方程式の初期値問題の解の安定性のための基準について述べる。例えば、[Eidelman, Parabolic Systems, 1969]、[Repnikov and Eidelman, Math. USSR-Sbornik, 2 (1967), 135-139]、[Kamin, Proc. Roy. Soc. Edinburgh A, 76 (1976), 43-53]、[Denisov and Repnikov, Differential Equations, 20 (1984), 16-33]などによって、次のような結果が知られている。解が時刻無限大で定数に各点収束をする必要十分条件は、初期値が空間平均値を持つことである。さらに、解が時刻無限大で定数に一様収束をする必要十分条件は、初期値の空間平均値への収束が空間を拡大するとき中心点に依らずに一様に収束をすることである。

一方、[Krzyzanski, Ann. Polon. Math., 3 (1957), 288-299]は１次元の全空間の上の熱方程式の初期値問題の解が時刻無限大まで永久に振動するような有界な初期値の存在を示し、さらに、[Collet and Eckmann, Nonlinearity, 5 (1992), 1265-1302]はその簡単な例を与えた。

したがって、有界な初期値に対する１次元の全空間の上の熱方程式の初期値問題の解の長時間挙動は複雑で有り得る、ということになる。実際、[Vazquez and Zuazua, Chin. Ann. Math. B, 23 (2002), 293-310]はその一般的な挙動は非常に複雑であることを示した。すなわち、彼らは次のような結果を示した。

命題１：

u0をL∞（R）の元とする。組（L∞, L１）に関する弱スター位相における c→＋∞ のときの u0(cx)の集積点全体の集合をＡとする。さらに、Ａの元を初期値とするような熱方程式の解が、時刻１において取る状態全体の集合をＢとする。また、u(x,t)を初期値

を u0 とする熱方程式の解とする。このとき、局所L∞における s→＋∞のときの u(sx,ss) の集積点全体の集合はBに一致する。
　ｃを正の数とする。Dをノルムが c 以下の L∞（R）の元全体の集合とする。Eを組（L∞，L１）に関する弱スター位相における a→＋∞のときの u(ax)の集積点全体の集合がDに一致するようなDの元全体の集合とする。このとき、組（L∞，L１）に関する弱スター位相において、Eの閉包はDであり、かつ、Dの内核は空である。

　しかしながら、本研究課題の研究代表者は、緩慢に変動するような初期値において、熱方程式の初期値問題の解の長時間挙動はかなり単純になることを示した。すなわち、次のような一連の結果を得た。

　以下において、Fを平均０、分散２の正規分布の累積分布関数とする。

　命題２：
　u0 を原点を除いて連続微分可能である有界な関数とする。さらに、v0 を u0 の導関数とする。|x|→＋∞のとき xv0(x)が 0 に収束するとする。u(x,t)を初期値を u0 とする熱方程式の解とする。このとき、関数

　u(sx,ss)-{F(-x)u0(-s)+F(+x)u0(+s)}

は s→＋∞のとき 0 にコンパクト一様収束する。

　命題３：
　u0 を原点を除いて連続微分可能である有界な関数とする。さらに、v0 を u0 の導関数とする。|x|→＋∞のとき xv0(x)が 0 に収束するとする。Aを c→＋∞のときの (u0(-c),u0(+c))の集積点全体の集合とする。BをAの元(a,b)に対して aF(-x)+bF(+x)であるような関数全体の集合とする。u(x,t)を初期値を u0 とする熱方程式の解とする。このとき、局所L∞における s→＋∞のときの u(sx,ss)の集積点全体の集合はBに一致する。

　また、原点で特異性を持つ初期値に対する熱方程式の解の原点付近の短時間挙動について、上記の命題２に類似をする次のような結果を得た。

　命題４：
　u0 を原点を除いて連続微分可能である有界な関数とする。さらに、v0 を u0 の導関数とする。|x|→+0 のとき xv0(x)が 0 に収束するとする。u(x,t)を初期値を u0 とする熱方程式の解とする。このとき、関数

　u(sx,ss)-{F(-x)u0(-s)+F(+x)u0(+s)}

は s→+0 のとき 0 にコンパクト一様収束する。

　さて、[Nara and Taniguchi, J. Differential Equations, 237 (2007), 61-76]は１次元の全空間の上の熱方程式の初期値問題の解と初期曲線が１次元の全空間の上のグラフによって表示される場合についての曲線短縮流の初期値問題の解の差が時刻無限大において０になることを示した。すなわち、彼らはより詳しく次のことを示した。

　命題５：
　ε＞０とする。u0 を有界なＣ２級関数で、その２階導関数が一様にεヘルダー連続とする。u(x,t)を初期値を u0 とする熱方程式の解とする。v(x,t)を初期値を u0 とする曲線短縮流の解のグラフとする。このとき、関数 s|v(x,ss)-u(x,ss)|は有界である。

　したがって、命題２と命題５により、曲線短縮流の解のグラフの長時間挙動について、次の結果が得られる。

　命題６：
　ε＞０とする。u0 を有界なＣ２級関数で、その２階導関数が一様にεヘルダー連続とする。さらに、v0 を u0 の導関数とする。|x|→＋∞のとき xv0(x)が 0 に収束するとする。u(x,t)を初期値を u0 とする曲線短縮流の解のグラフとする。このとき、関数

　u(sx,ss)-{F(-x)u0(-s)+F(+x)u0(+s)}

は s→＋∞のとき 0 にコンパクト一様収束する。

　以上が主な成果であるが、今後の展望として、特に次の点が命題２と命題５に関連して注目される。
　熱方程式の解を時空間変数(x，t)からスケーリングした時空間変数(y,s)=(x/t，2log t)に移って見ると、変数係数の拡散方程式が得られる。この変数係数の拡散方程式の右辺の楕円型方程式の固有値 0 に対応する固有関数として、１次独立な２つの関数 F(-x), F(+x)が得られる。しかしながら、固有値 0 は離散スペクトルではない。２つの実数(a, b)に対して、関数 aF(-x)+bF(+x)は定常解である。
　そこで、a と b を連続微分可能である有界な関数として、さらに c と d をその導関数として、|t|→＋∞のとき c(t)と d(t)が 0 に収束するとする。このとき、命題２と命題５を用いると、変数係数の拡散方程式のある解 u(x,t)が存在して、関数

　u(x,t)-{a(t)F(-x)+b(t)F(+x)}

は|t|→＋∞のとき 0 にコンパクト一様収束

する、という結果が得られる。すなわち、「２次元の定常解の族」の近くを、$|t|\to+\infty$で、“自由”かつ“緩慢”に遍歴するという事実が得られる。

このように「定常解の族」が１次元以上の多様体をなしていて、さらに、0 がその各点における線形化作用素の“離散スペクトルでない”とき、その「定常解の族」の近傍における解の挙動は無限次元の力学系に特有の興味深い振る舞いを見せ、それらの挙動を調べることは重要な意義を持つと言える。

その他、本研究課題における研究として、以下のような研究を行った。

一般の双安定系を考える。安定な２つの定常解を結ぶ定常波解が存在し、さらに、シリンダー上で平面定常波解が線形安定であるとする。このとき、平面定常波解を緩慢に歪めた関数に対して、そこでの線形化作用素のスペクトル（に関する情報）について研究を行った。具体的には、0 に近いスペクトルの固有空間の詳しい情報を考察した。その結果、歪め方が十分に緩慢であるときは、歪め方を与える曲線における曲線短縮流の線形化作用素の固有値と固有関数に対応して、平面定常波解を緩慢に歪めた関数に対して、そこでの線形化作用素の0に近いスペクトルの固有値と固有関数が現れるという予想が得られた。この予想から得られる結果を利用して、様々な非線形拡散方程式系において、シリンダー上で平面定常波解が線形安定であるような進行波解について、そこから曲線短縮流に従う現象が観察されることの理論的な根拠づけが得られるであろう、と思われる。

また、２成分の興奮系におけるパルスの衝突消滅過程の研究を行った。その結果、反応項が特別な形の場合には、特異極限法で得られる縮約方程式の解を元にして（特異極限法で用いるパラメータが十分に小さい場合には）真の解の近似解を“２つのパルスの間の距離が十分に近い状況”に至るまで構成可能である、という予想を得た。さらに、（特異極限法で用いるパラメータが十分に小さい場合には）そこから“短い時間の間”で１成分に関するフロント部分の対消滅が起こり、また、さらに、特異極限法で得られる縮約方程式の解を元にして、真の解の近似解が構成されて、さらに、そこから“短い時間の間”で１成分に関するバック部分の対消滅が起こるため、結果として、この全過程を通してパルスが消滅する、ということが予想される。この予想から得られる結果を利用することで、反応項が特別な形を持つような２成分の興奮系については、特異極限法の使用に用いるパラメータが十分に小さい場合には、二つのパルスが離れて向かい合っている状況から出発すると、パルスは衝突して、最終的にパルスが消滅する現象が観察されることの理論的な根拠づけが得られるであろう、と思われる。一方、より一般の２成分の興奮系で（特異極限法の使用に用いるパラメータが十分に小さい場合であったとしても）パルスが衝突した際にパルスの消滅が起こらない場合が有り得るか？、という興味深い問題に繋がっていくことが期待される。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計１件）

① 柳下 浩紀、Remarks on space-time behavior in the Cauchy problems of the heat equation and the curvature flow equation with mildly oscillating initial values、Kodai Math. J.、37 (2014)、16―23、査読有

６．研究組織

(1)研究代表者

柳下 浩紀 （YAGISITA, Hiroki）
京都産業大学・理学部・教授
研究者番号：80349828