様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９、ＣＫ－１９（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　研究成果報告書

平成２６年６月２日現在

機関番号：34310
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2011年4月28日～2014年3月31日
課題番号：23540255

研究課題名（和文）　線形微分作用素の跡公式と非線型可積分系の代数解析的研究

研究課題名（英文）　An algebro-analytic study on the trace formulas associated with the linear ordinary differential operators and the nonlinear integrable systems

研究代表者
大宮　眞弓（OHMIYA, Mayumi）
同志社大学・生命医科学部・教授
研究者番号：50035698

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）2,200,000円、（間接経費）660,000円

研究成果の概要（和文）：ディラック型微分作用素に関する準可換微分作用素の構造を明らかにした。特に、ソリトン理論の原点とも言えるミウラ変換が、定常 KdV 階層の全てで成立することを明らかにし，極めて興味深い恒等式が発見された。他方、KdV 階層とは異なったタイプの力学系として保存系でない SIR モデルを研究した。さらに跡公式を応用して定常 KdV 階層の全ての第一積分を系統的に構成するスキームを構成した。第一積分を用いて定常 KdV 階層の線形化作用素に対する固有値問題の方程式をリーマン球上の確定特異点型微分方程式に変換して、それを用いて定常　KdV 階層の解の解析的性質を調べる方法を開発した。

研究成果の概要（英文）：The structure of the semi-commutative operators associated with the Dirac type operator is clarified. In particular, the Miura transformation, which is the starting point of the soliton theory, is generalized to the whole stationary KdV hierarchy and quite interesting identities are discovered. On the other hands, the SIR model, which is a dynamical system of quite different type, is studied. In addition, applying the trace formulas, the scheme for the construction of whole set of the first integrals associated with the stationary KdV hierarchy is obtained. Using the first integrals, the equation of the eigenvalue problem associated with the linearizing operator is transformed to the ordinary differential equation with the regular singular points on the Riemann sphere, and using that equation, the method to study the analytic properties of the solutions of the stationary KdV hierarchy is explored.

研究分野：　数物系科学

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：　ダルブー変換、ディラック型作用素、ミウラ変換、定常 KdV 階層、定常 mKdV 階層、準可換微分作用素、漸化作用素、跡公式

１．研究開始当初の背景

(1) 1965 年前後から開始されたソリトン理論の研究は、当初は逆散乱法の発見により、線形微分作用素の散乱理論の応用として多重ソリトン解の構成や、漸近挙動の研究等がされた。その後、AKNS 理論のように、逆散乱理論が適用できる方程式系を探すスキームの研究が行われた。さらに、佐藤理論の登場により、無限次元リー環等の表現論的な色彩が強くなり、非線型の方程式を具体的に解くという問題意識が薄くなっていった。

(2) 1980 年代後半から、本報告者は、上記(1)のような状況に疑問を抱き、古典代数解析的手法によるソリトン方程式の研究を開始し、漸化作用素を用いたソリトン方程式と対応する線形化作用素の固有値問題の解法を確立した。この古典代数解析的手法によるソリトン方程式の研究は、ある意味で、ソリトン方程式を、本来の微分方程式として研究し、かつ具体的な解を構成しつつ、非線型特殊関数論とでもいうべきスタンスで楕円関数、超

楕円関数を研究できる状況になっていた。

(3) 上記(2)の方法を用いて線形化作用素のスペクトルを計算する方法を確立し、それを応用してダルブー変換の退化条件等を明らかにしていた。さらに具体的な第一積分の計算には計算機代数の使用が不可欠であるが、その為には、計算機を用いた機械的な大量の計算が必要になり、入力に手作業が必要になる。その為に、大学院生の多くの手助けが必要になるが、彼ら大学院生たちのマニュアル的な教科書として、著書①、②のゲラ刷りもできあがっていたので、計算機代数 Maple を使うに当たって、大学院生の教育をしなくて良い状況になっていた。その為、躊躇せず Maple を活用できる状況になっていた。また、計算機代数 Maple の使用マニュアルだけでなく、大学院生たちに計算の補助をさせる場合に、問題を説明するのが多大な労力が必要だったのが、2008 年に刊行した報告者の著書

非線形波動の古典解析、森北出版 2008 年

が極めて有効であった。おかげで、大学院生たちも、無味乾燥な入力作業の意味も理解でき、作業がはかどったと思っている。

(4) 報告者は、2009 年の研究において、スペクトルを具体的に計算するスキームを応用して、定常 KdV 階層の第一積分の包合系を組織的に、かつ代数的に構成する手法をすでに確立していた。第一積分生成多項式の理論である。これは上にも述べたように、既に、完成していた計算方法だが、2009 年には英文の短報が、もう少し解説を詳しくした邦文の報告書が出版されていたため、これも大学院生に機械的計算を補助してもらうのに有効であった。

(5) 他方、この分野は、アーベル関数の理論として 20 世紀初頭には、違う観点で研究され、深い結果が得られている。本研究は、ある意味でこれらの古典的研究を、1965 年頃からの、ソリトン理論の発展の中に位置づけることにより、微分方程式の視点からのアーベル関数論の再構築と見なしてもよい。それらの研究は、たとえば

H. F. Baker, Abelian function, Cambridge, 1987
H. F. Baker, An introduction to the theory of multiply periodic function, Cambridge, 1907
A.Krazer, Lehrbuch der theta funktionen, Teubner, 1903
D. Mumford, Tata lectures on theta II Birkhauser, 1993

のような古典的著作に著されている。特に前三者が重要である。すなわち、ある意味で、これらの 19 世紀の研究を、ソリトン理論の研究の中で生き返らせる事が目的と言ってもよい。これは次項で述べる「研究の目的」でもあるが、手法はソリトン理論、解明する対象は 19 世紀的アーベル関数論と言う状況を最も適切に表していることである。

２．研究の目的

(1) 上に述べた状況下で、古典代数解析的手法で、KdV 階層や、それらに付随して得られる mKdV 階層の解そのものの構造論的研究を深めることを一つの目標とした。すなわち佐藤理論以降の可積分系理論の構造論的研究は、解空間の変換群としての研究が主であったが、解そのものにもアーベル関数と同様の構造論的研究が可能であり、かつ、そのことで楕円関数やアーベル関数の古典代数解析的研究を展開することが本研究の目的の一つであった。

(2) 本報告者が 1979 年頃に研究したディラック型作用素の逆散乱理論は、多重ソリトン解の逆散乱理論による解の構成はできたが、1 次元シュレディンガー型作用素と異なり、散乱理論としては不十分な結果に終わっていた。そこで、ディラック型作用素に対する古典代数解析的研究を行うことにより、関数解析的困難を克服する方策を見つけ出すことも一つの目標とした。

(3) すでに明らかにされていた跡公式やスペクトルの構成方法を応用して第一積分が構成できていたが、それを用いて、定常 KdV 階層の解の解析的性質の解明を行うことも目的とした。第一積分の包合系が構成できると、原理的には、変数分離形の方程式に簡略化され、そのことから解に対応するリーマン面が構成できるが、本研究では、そのルートとは異なるアプローチで、変数分離形方程式から得られる解の多価性を明らかにすることであった。

３．研究の方法

(1) 報告者によって発見されたダルブー変換の基本等式、ならびに、その証明にも用いた、形式的擬微分作用素である漸化作用素のクーパーシュミット・ウィルソン（KW）分解を用いて、KdV 多項式、mKdV 多項式に関する様々な等式群を見いだすことにより、定常可積分系の階層の解の解析的性質を明らかした。実際、本報告の雑誌論文②によって発見された極めて興味深い等式は、ソリトン方程式に関するさらなる等式群の存在を予感させる。楕円関数や超楕円関数の変換公式や加法定理は、何らかの形で、この方法で意味づ

けられると思われる。現時点では、非スペクトル型ダルブー変換でワイヤストラスのペー関数とシグマ関数の結びつける等式と、今回証明したダルブー変換の一般化である KdV 階層と mKdV 階層の変換公式だけだが、一般化は早婚なんでは無いと思われる。

基本等式は、1980 年代後半に報告者によって発見された等式だが、KdV 階層の研究では非常な威力を発揮する恒等式で、今回の研究でも、不可欠なものであった。KW 分解も同様にディラック型作用素の交換子積を計算し、簡略化する際に、非常に有効なものであった。

(2) KdV 階層において成功した漸化作用素を用いた、1 次元シュレディンガー型作用素に対する代数解析的なスペクトル理論の再構築や、モノドロミー保存変形理論をディラック型作用素に拡張する方法をとった。困難なのは、mKdV 階層に対応する漸化作用素が、シュレディンガー型作用素と異なり、形（微分作用素と積分作用素が複雑に入り組んでいる）が複雑なため、スペクトル判別式が簡単な形にならないため、その問題をクリアするための考察が必要である。

(3) 定常 KdV 階層の第一積分を具体的に計算し、解を用いて KdV 階層の線形化作用素に対する固有値問題の方程式の変数変換を行い、リーマン球上の確定特異点型方程式に変換し、局所モノドロミーの計算を行い、解の解析的性質を研究した。この方法は、他の項でも述べるが、古くはラメ関数の研究で用いられた古典的手法の再生である。高階定常 KdV 方程式になると、特異点の個数が増えて、ホイン型等になるため、ガウス型方程式(超幾何方程式)の場合と異なり、接続問題が解けなくなり大域的構造はすぐには解決できないが、局所モノドロミーは決定方程式の解の性質だけから調べられるので、有効な手段である。特に、今回は、詳しい結果は論文としては発表していないが、学会発表①において、スペクトルパラメータを可解なものにすると、固有値問題は可解なため、その変換された確定特異点型の大域解が構成できることを報告した。これは確定特異点型の問題で言うとアクセサリーパラメータの問題で、そのパラメータをうまく選ぶことにより大域的問題が解けることに対応している。

４．研究成果

(1) 多成分作用素であるディラック型微分作用素に対する準可換微分作用素を構成した。さらに、従来知られていた 1 次元シュレディンガー作用素に対する準可換微分作用素を用いて得られた KdV 多項式の系列と、ディラック型作用素の準可換微分作用素を用いて得られる mKdV 多項式の系列の間に成立する極めて興味深い等式群が得られた。これは、ソリトン理論の出発点となったミウラ変換、あるいはダルブー変換の関係式が KdV 階層の各レベルでも成立していることを示している。楕円関数にこれを適用すると、ワイヤストラスのペー関数とシグマ関数の間の関係を一般化するもので、楕円関数論、あるいは超楕円関数論の新たなアプローチを示唆するものである。これらの結果は、文献②と③において報告した。

(2) 非線型可積分系としての KdV 階層のような力学系と異なるタイプの力学系として SIR モデルを研究した。結果は文献③に述べてある。オリジナルの SIR モデルは、保存系で、インフルエンザ等の疫病伝染における罹患者と免疫保有者の関係を表すものとして有名である。本研究では、口蹄疫等の家畜伝染病のような殺処分が可能なものを考察し、保存系ではないタイプの力学系を構成し数値解析的手法で解の性質を解析した。殺処分可能性が、保存系ではないことを意味している。力学系として、反対の性質を持つ高階 KdV 方程式と SIR モデルを対比して保存量の持つ意味を別の視点から考察した。簡単に言えば、KdV 階層が何故に頂点代数等の代数構造を持ち得る理由を明らかにしたと言える。

(3) もう一つの研究は、雑誌論文①で報告したものである。この研究は、まだ完成の域には達していないが、方法論としては確立されている。研究の方法(3)で述べたもので、KdV 階層の第一積分を利用して、階層の線形化作用素に対する固有値問題の方程式をリーマン球上の確定特異点型の方程式に変換し、そのモノドロミーを調べることにより KdV 階層の解の解析的性質を調べた。現時点では、局所モノドロミーだけで調べられる、KdV 階層の解の周期性や二重周期性を証明できた。この手法は、ソリトン理論の初期から、逆散乱方法等の、一種の「回りくどさ」の意味を明らかにしている。この回りくどさは広田微分で有名な広田良吾氏が、氏の巧妙な双線形法を直接法と名付けた理由でもあると聞いている。なお、この我々の手法は、古くはラメ関数の研究においては古くから使われていたものである。今回は、決定方程式の根の特徴だけから決まる局所モノドロミーの活用だけであったが、アクセサリーパラメータとしての役割を持つスペクトルパラメータをうまく選ぶことにより、接続問題等の大域的問題の解が応用できるような問題も、この手法が適用可能である。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計４件）

① 松島正知， 岡本沙紀，大宮眞弓：楕円・超楕円に対するソリトン理論的アプローチ，九州大学応用力学研究所研究集会報告、No.25AO-S2，査読あり、2014、101-106

② M. Matsushima, M. Ohmiya, Semi-commutative differential operator and Darboux transformation, Advances in Pure Mathematics,査読あり、2013,209-213

③ 松島正知、大宮眞弓、Darboux変換の一般化と準可換微分作用素、九州大学応用力学研究所研究集会報告、No.23AO-S7、査読あり、2012,102-108

④ 松島弘典、大宮眞弓、口蹄疫伝染パターンと変形SIRモデル、九州大学応用力学研究所研究集会報告、No.23AO-S7、査読あり、2012,186-188

〔学会発表〕（計４件）

① 松島正知， 岡本沙紀，大宮眞弓：楕円・超楕円に対するソリトン理論的アプローチ、九州大学応用力学研究所研究集会「非線形波動の拡がり」2013 年 11 月

② 松島正知、大宮眞弓、Darboux 変換の一般化と準可換微分作用素、九州大学応用力学研究所研究集会「非線形波動研究の進展」2011 年 11 月

③ 松島弘典、大宮眞弓、口蹄疫伝染パターンと変形 SIR モデル、九州大学応用力学研究所研究集会「非線形波動研究の進展」2011 年 11 月

④ M.Matsushima, M.Ohmiya, Semi-commutative differential operators associated with the Dirac operator and a new formulation of the mKdV hierarchy, EQUADIFF2011, Loughborough Univ. England,2011 年 8 月

〔図書〕（計 ２件）

① 大宮眞弓、森北出版、フーリエ・ラプラス解析の基礎、2013、128

② 大宮眞弓、森北出版、複素解析の基礎、2013、144

６．研究組織

(1)研究代表者

大宮 眞弓（OHMIYA, Mayumi）
同志社大学・生命医科学部・教授
研究者番号：50035698