

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 3 日現在

機関番号：34428

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2011～2015

課題番号：23540317

研究課題名(和文)高次元ブラックホールの対称性

研究課題名(英文)Symmetry of Higher Dimensional Black Hole

研究代表者

安井 幸則 (Yasui, Yukinori)

摂南大学・理工学部・教授

研究者番号：30191117

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円

研究成果の概要(和文)：キリング・矢野対称性を許す高次元時空の分類を行なった。具体的な時空計量を求める問題は一連の偏微分方程式を解く問題に帰着する。これらの偏微分方程式に対しいくつかの解を得ることに成功した。偶次元には3つのタイプの時空が存在する。他方、奇次元の時空にはより豊富な時空構造が許される。本研究で構成された時空計量はキリング・矢野対称性を持つ最も一般的な解ではないが、アインシュタイン重力理論や超重力理論の広範囲の解をカバーするものになっている。実際、回転する高次元ブラックホール時空、マックスウェル場と結合した電荷を持つブラックホール時空、トーシオンを含む超対称時空等々である。

研究成果の概要(英文)：We study a classification of a spacetimes admitting the Killing-Yano symmetry. We reduce the classification problem to that of solving a set of partial differential equations, and present some solutions to these PDEs. In even dimensions, three types of solutions are obtained. In odd dimensions, we obtain more varieties of solutions. The explicit solutions constructed are not the most general possible admitting the required symmetry, nevertheless, it is demonstrated that they cover a wide variety of solutions of Einstein gravity and various supergravity theories, such as the rotating higher dimensional black hole, the charged black hole coupled to Maxwell field, supersymmetric solutions with torsion.

研究分野：素粒子論

キーワード：高次元ブラックホール キリング・矢野対称性

#### 1. 研究開始当初の背景

共形キリング・矢野テンソル (CKY) はキリングベクトルを高階の反対称テンソルに拡張したものであり、1968 年立花-柏田により純粋に数学的な対象として導入された。宇宙物理学への応用 Penrose-Floyd(1973 年)によって最初に研究された。彼らはこのテンソルを使って 4 次元 Kerr 時空上の測地線方程式が変数分離することの幾何学的な説明を与えた。その後、Klein-Gordon 方程式、Dirac 方程式、重力摂動方程式の変数分離性、そして曲率テンソルの代数的特性等々、Kerr 時空上の「不思議な性質」の背後に CKY が存在することが明らかになってきた。

#### 2. 研究の目的

立花-柏田によって導入された CKY は、4 次元 Kerr 時空の“隠れた対称性”を記述するだけでなく、高次元ブラックホール時空の基本的な対象性になる可能性がある。本研究では、このような対称性を使って、高次元時空に存在する多様なブラックホール時空に対し統一的な枠組みを与えるとともに、超弦理論や超重力理論の高次元ブラックホール解を具体的に構成することを目指すものである。また、CKY を使って高次元統一理論のコンパクト化の問題に対し新しい手法を提供する。

#### 3. 研究の方法

(1) CKY の存在を仮定すると、すべての次元において真空の Einstein 方程式を満たすブラックホール時空が一意的に定まることを証明した。この結果は、宝利-大田との共同研究(2007)によって得られたものである。このような一意性は、重力場以外の物質場が存在するとき成立するとは考えにくい。しかしながら、超弦理論や超重力理論のように物質場がトーションとして幾何学的に解釈できる場合、CKY 方程式に含まれるレビ・チビタ接続を拡張することにより、一般化された CKY (GCKY) を定義できる可能性がある。実際、5 次元超重力理論において、CKY は存在しないが GCKY が存在するブラックホール解の例が発見されている。本研究では、CKY の一意性定理を一般化し、GCKY を許す超重力理論の高次元ブラックホール時空の分類を行う。

(2) 時空に超対称性が存在することを仮定する。超対称性は時空に対し大変強い縛りを与えるため、単に解を分類するだけでなく、具体的な解の構成まで行える可能性がある。特に超弦理論をコンパクト化したときに現れるコンパクト Einstein 多様体は、物理的にも数学的にも興味深い研究対象である。Semmelmann は、このようなコンパクト多様体が CKY にある種の条件を課すことにより分類できることを示した。本研究では CKY の対称性を利用して Semmelmann によって分類された多様体を具体的に構成する。

#### 4. 研究成果

(1) 20 世紀後半になって、超弦理論や超重力理論等々の重力を含む統一理論の関心は高次元ブラックホール時空を研究する大きな動機付けを与えた。私たちは、このような流れの中で CKY 対称性が高次元にも拡張できることを明らかにしてきた。そこで、2005 年から 2011 年にかけて行った高次元ブラックホールの対称性および Einstein 重力理論の厳密解に関する一連の研究を整理し新しい考察も加えレビュー論文を発表した。この論文は、近年の高次元ブラックホール研究の発展をまとめた Progress of Theoretical Physics (2011) に招待論文として投稿したものである。

(2) CKY 対称性に物質場による変形の効果を導入することで、より広いクラスのブラックホール時空が捕えられるようになった。特に超重力理論の場合、このような変形は 3 階反対称テンソルで定まるトーションとして自然な解釈が与えられる。本研究では、トーションで拡張された CKY (GCKY) を許す時空の分類を行った。分類リストには、超重力理論の高次元ブラックホール時空やソリトン解を記述する佐々木多様体、弱いケーラー多様体、弱い G2 多様体も含まれる。これらの多様体は、Semmelmann の分類を具体的に実現したものである。また、Wahlquist(1968, 1992) によって発見された完全流体中の回転するブラックホール時空にも GCKY 対称性が存在することを明らかにし、Wahlquist 解の一般次元への拡張に成功した。GCKY 対称性の威力が厳密解の構成に発揮された最初の例である。

(3) G-構造は超弦理論や超重力理論における超対称な厳密解を構成する強力な手法を提供する。本研究では、7 次元および 8 次元空間でコンパクト化したヘテロ型超重力理論の時空を記述する厳密解の構成を行った。7, 8 次元に対応する G-構造は、Berger による特殊ホロノミー多様体の分類から G2 および Spin(7) であり、この構造を許す具体的な解を求めることを目標とした。得られた結果は、Bryant-Salamon, Cvetic-Gibbons-Lu-Pope (1989, 2002) によって発見された例外型ホロノミー群を持つリッチ平坦計量 (重力インスタントン) をトーションを含む形に拡張したものにしている。

(4) 時空をワイル曲率テンソルの固有値を使って分類するペテロフ分類は有名である。Schwarzschild 時空や Kerr 時空は固有値に 2 重縮退のあるタイプ D に属する。タイプ D 時空に真空条件をさらに課すことにより、曲率テンソルに「代数的な性質」が現れる。すなわち、曲率テンソルを何回微分しても、それらが微分なしの曲率テンソルで書けてしまうのである。このような性質はキリング・矢野テンソルの存在と密接に関連する。キリン

グ・矢野テンソルはCKY に対し co-closed 条件を課すことにより得られる反対称テンソル場である。本研究では、ペテロフ分類より精密な時空情報を得るために、キリング・矢野テンソルの可積分条件を延長 (prolongation) を使って微分形式のベクトル束上で定式化し、以下の定理を証明した。

**定理 1** . タイプ D 真空条件を満たすすべての時空には, Kinnerseely の分類(III)を除き, 階数 2 のキリング・矢野テンソルがただ一つ存在する .

**定理 2** . タイプ D 真空条件を満たすすべての時空に階数 3 のキリング・矢野テンソルは存在しない .

さらに、他の 4 次元時空, 5 次元時空そして超対称性を許す重力インスタントンに対しても階数 p のキリング・矢野テンソルの次元公式を導出した(表 1,2,3) .

表 1 . 4 次元時空

	p=1	p=2
最大対称空間	10	10
Plebanski-Demianski	2	0
Kerr	2	1
Schwarzschild	4	1
Wahlquist	2	0
Friedmann-Walker	6	4

表 2 . 5 次元時空

	p=1	p=2
最大対称空間	15	20
Myers-Perry	3	0
Emparan-Reall	3	0
Kerr string	3	1

表 3 . 重力インスタントン

	p=1	p=2
Plebanski-Demianski	2	3
Kerr-bolt	2	4
Taub-NUT	4	4

#### 5 . 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 11 件)

K.Hinoue and Y.Yasui, Heterotic Solution with  $G_2$  and Spin(7) Structures, JP Journal of Geometry and

Topology, 17 No.1(2015) 17-48, 査読有.

T.Houri and Y.Yasui, A simple test for spacetime symmetry, Class. Quant. Grav. 32 (2015) 055002 (29 pages), 査読有. 安井幸則, 接続, 特集「テンソルの物理的イメージ」数理科学 2015 年 7 月号 44-49, 査読無.

K.Hinoue, S.Mizoguchi and Y.Yasui, Supersymmetric heterotic solutions via non-SU(3) standard embedding, Phys.Rev. D90 (2014) 106009 (9 pages), 査読有.

K.Hinoue, H.Houri, C. Rugina and Y.Yasui, General Wahlquist metrics in all dimensions, Phys.Rev.D90 (2014) 024037 (14 pages), 査読有.

安井幸則, アインシュタインが取り入れたリーマン幾何学の発想, 特集「幾何学における様々な数学的発想」数理科学 2014 年 3 月号 32-33, 査読無.

安井幸則, ブラックホールの幾何学と重力のソリトン, 大阪市立大学 News letter 2014, 6, 査読無.

T.Houri, H.Takeuchi and Y.Yasui, A deformation of Sasakian Structure in the presence of torsion and supergravity solutions, Class. Quant. Grav. 30 (2013) 135008 (31 pages), 査読有.

T.Houri, D.Kubiznak, C.M.Warnick and Y.Yasui, Local metrics admitting a principal Killing-Yano tensor with torsion, Class.Quant.Grav. 29(1912) 165001 (30 pages), 査読有.

Y.Yasui and T.Houri, Hidden Symmetry and Exact Solutions in Einstein Gravity, Prog. Theor. Phys. Supplement 189 (2011) 126-164, 査読有.

安井幸則, 特集「物理学と多様体」幾何学構造がもたらす物理学の理解, 監修, 数理科学 2011 年 4 月号, 査読無.

[学会発表](計 32 件)

宝利剛, Killing-Stackel Tensor in Kerr Spacetime, 日本物理学会 2016 年 3 月 19 日, 東北学院大学 (宮城県).

安井幸則, ペテロフ D 型時空上のキリング・矢野対称性, 第 17 回特異点研究会 2016 年 1 月 10 日, 慶応義塾大学 (神奈川県).

宝利剛, Conformal Killing-Yano Symmetry of Kerr Spacetime, 日本物理学会 2015 年 9 月 26 日, 大阪市立大学 (大阪府).

安井幸則, アインシュタイン計量との出会い, 大阪市立大学物理学科談話会 2015 年 3 月 26 日, 大阪市立大学 (大阪府)

宝利剛, Prolongation of rank-2 symmetric Killing tensors and

curvature conditions, 日本物理学会 2015年3月24日, 早稲田大学(東京都).  
安井幸則, 時空の対称性を数える, 大阪市立大学数学物理合同セミナー, 2015年2月21日, 大阪市立大学(大阪府).

安井幸則, A simple test for spacetime symmetry, Workshop on geometry, extra dimension and string phenomenology in Miyazaki, 2014年11月5日, ANA ホリデイ・インリゾート宮崎 (宮崎県).

安井幸則, Killing-Yano 対称性と時空の分類, 素粒子論セミナー, 2014年6月4日, 京都大学(京都府).

宝利剛, General Wahlquist Metrics in All Dimensions, 日本物理学会 2014年3月30日, 東海大学(神奈川県).

樋ノ上和貴, Heterotic SUSY Domain Wall, 日本物理学会 2014年3月27日, 東海大学(神奈川県).

安井幸則, 例外群 E8 に基づく素粒子の超対称非線形模型, 第16回特異点研究会 2014年1月12日, 茨城大学(茨城県).

安井幸則, 例外群 E8 に基づく素粒子の統一模型, セミナー 2013年10月26日, KEK(茨城県).

安井幸則, CKY と時空の隠れた対称性, セミナー 2013年10月25日, KEK(茨城県).

廣岡隆孝, 例外群 E8 に基づく素粒子の統一模型, 日本物理学会 2013年9月23日, 高知大学(高知県).

宝利剛, 2階のキリング・矢野テンソル場をもつ5次元カルツァ・クライnbrackホールとその高次元への一般化について, 日本物理学会 2013年9月20日, 高知大学(高知県).

安井幸則, Conformal Killing-Yano テンソルの次元公式, 日本物理学会 2013年9月20日, 高知大学(高知県).

安井幸則, 共形キリング・矢野対称性と超重力理論への応用, セミナー 2013年7月17日, 立教大学数理物理学研究センター(東京都).

安井幸則, CKY 対称性と佐々木構造の変形, 微分幾何セミナー, 2013年5月29日, 大阪市立大学数学研究所(大阪府).

安井幸則, Conformal Killing-Yano Tensor, 相対論合宿型研究会, 2013年3月14日, 茨城大学(茨城県).

安井幸則, Hidden Symmetry and Exact Solutions in Supergravity Theories, 研究会「エキゾチック時空幾何とその応用」, 2013年2月23日, 理化学研究所(埼玉県).

⑲ Yukinori Yasui, Hidden Symmetry and Exact Solutions in Higher Dimensional Gravity, String Theory Mini-workshop, 2012年11月23日, NCTU, (Taiwan)

⑳ 安井幸則, Einstein Metrics from Hidden

Symmetry, 素粒子論セミナー, 2012年10月29日, 茨城大学(茨城県).

⑳ 樋ノ上和貴, 例外型ホロノミー群を持つヘテロ型超重力理論における重力インスタントン, 日本物理学会 2012年9月11日, 京都産業大学(京都府).

㉑ 安井幸則, 佐々木構造の変形と超重力理論の厳密解, 研究会「場の理論と弦理論」, 2012年7月24日, 京都大学基礎物理学研究所(京都府).

㉒ 竹内寛, 佐々木 Einstein 計量の物質場による変形と Hidden Symmetry, 日本物理学会 2012年3月27日, 関西学院大学(兵庫県).

㉓ 安井幸則, Hidden Symmetry and Exact Solutions in Einstein Gravity, GEOSOCK セミナー「幾何学と数理物理」, 2012年3月15日, 大阪市立大学(大阪府).

㉔ 安井幸則, CKY の展望, 研究会「高次元ブラックホールと AdS/CFT 対応」, 2012年1月7日, 伊豆高原ホテルロビング(静岡県).

㉕ 安井幸則, 高次元時空の隠れた対称性, セミナー, 2011年11月21日, 光量子科学研究所(岡山県).

㉖ 樋ノ上和貴, 超重力理論におけるインスタントン, 日本物理学会 2011年9月16日, 弘前大学(青森県).

㉗ 宝利剛, Hidden Symmetry of Supergravity Black Holes, 日本物理学会 2011年9月18日, 弘前大学(青森県).

㉘ 安井幸則, 高次元ブラックホールの対称性と厳密解, 研究会「場の理論と弦理論」, 2011年7月25日, 京都大学基礎物理学研究所(京都府).

㉙ 安井幸則, 高次元ブラックホールの対称性と厳密解, 相対論・宇宙論合同セミナー, 2011年4月19日, 大阪市立大学文化交流センター(大阪府).

〔その他〕

時空上のCKYを数える Mathematica パッケージを以下のホームページ公開している:

[http://www.research.kobe-u.ac.jp/fsci-pacos/KY\\_upperbound/](http://www.research.kobe-u.ac.jp/fsci-pacos/KY_upperbound/).

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

安井 幸則 (YASUI, Yukinori)

摂南大学・理工学部基礎理工学機構・教授  
研究者番号: 30191117

### (2) 研究協力者

宝利 剛 (HOURI, Tsuyoshi)

David Kubiznak

Claude Warnick