様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　(共通)

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２９ 年　 ６ 月 ２２ 日現在

機関番号： １２４０１
研究種目： 基盤研究(C)（一般）
研究期間： 2011～2016
課題番号： ２３５６００６２

研究課題名（和文）ジョルダン問題およびクロネッカ問題の安定かつ効率よい数値解法の確立

研究課題名（英文）Proposal of efficient numerical algorithms for Jordan and Kronecker problems

研究代表者
重原　孝臣（SHIGEHARA, Takaomi）

埼玉大学・理工学研究科・教授

研究者番号：６０２０６０８４

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,900,000円

研究成果の概要（和文）：本研究では、数値線形代数の基本テーマの一つであるジョルダン問題、および、それを拡張したクロネッカ問題に対する新たな数値解法を提案した。いずれに対しても標準的な前処理をアルゴリズム中に組み込み、また、特異値分解をベースにアルゴリズムを構成することで数値的安定性を高めている。クロネッカ問題に対する提案アルゴリズムは、クロネッカ標準形のみならず、クロネッカ基底も数値的に計算できる。したがって、行列束がシンギュラーな場合も含めて任意の一般固有値問題に対して数値的に一般解を求めることが可能であり、この点は実用上も重要な成果の一つと考えられる。

研究成果の概要（英文）：The purpose of this work is to establish reliable numerical algorithms for the Jordan problem (JP) and Kronecker problem (KP), where not only the canonical form but transformation matrices are computed in both cases. Shedding light on a stratificated structure [see K. Kudo et al., JSIAM Letters, Vol.2 (2010) pp. 119-122 for JP and Y. Kakinuma et al., JSIAM Letters, Vol. 1 (2009) pp. 60-63 for KP], we proposed an efficient SVD-based algorithm for each problem, incorporated with the standard preprocessing reducing an input square matrix (resp. an input matrix pencil) to a block Schur form for JP (resp. a generalized upper triangular form for KP). One of the important contributions of this work from a practical viewpoint is to offer a complete numerical solution to a generalized eigenvalue problem of general type, where the associated matrix pencil might be singular.

研究分野： 数値線形代数

キーワード： 数値線形代数　ジョルダン問題　クロネッカ問題　一般固有値問題

1．研究開始当初の背景

PC の高速化・大容量化が急速に進む昨今、これまでスーパーコンピュータをはじめとする一部の高速計算機でしか行えなかった大規模な数値計算・シミュレーションが PC 上でも日常的に行われるようになってきている。これに伴って、数値計算・シミュレーションは、活用される分野の裾野を広げ、今では自然科学や社会科学のほとんど全ての分野で標準的なツールになっていると言っても過言でない。

大規模な数値計算・シミュレーションを実行する際、多くの場合、最も実行時間を要し、また、巨大なメモリを消費するのは行列演算に関わる部分である。したがって、行列に関わる諸計算を計算機上で高精度かつ高効率に実行するためのアルゴリズムの設計、プログラム実装は極めて重要であり、数値線形代数における中心的課題の一つになっている。

行列に関わる諸計算のうち、連立一次方程式、固有値問題、特異値分解については広汎かつ深い研究がこれまでに数多くなされ、実用レベルに達したライブラリ化されたプログラムも多数公開されてきた。他方、一般性がより高いジョルダン問題(以下 J 問題)や、J 問題を更に一般化したクロネッカ問題（以下 K 問題）については、応用上の重要性にも関わらず、その研究はいまだ発展途上にあると言っても過言でない。

J 問題は、正方行列 A が任意に与えられたときに、A のジョルダン標準形（以下 J 標準形）J、および、AP=PJ を満たす可逆行列 P（ジョルダン基底（以下 J 基底））を同時に決定する問題である。J 問題を解くことにより行列 A の代数的、幾何的性質を全て明らかにすることができる。A の固有値が全て異なる場合には A は対角化可能であって（J 標準形は対角行列）、固有値問題に対する標準的な数値解法（たとえば QR 法やその改良版）を用いて比較的容易に J 問題を解くことができる。他方、A が多重固有値を持つ場合には一般には A は対角化できず非自明な J 標準形を持つ。このため、J 問題を数値的に解くことは容易ではない。

J 問題に関する主要な既存研究として文献①、②がある。文献①ではユニタリー変換（特異値分解（SVD）を含む）を用いて J 標準形を計算する方法が提案されている。これは現在においても J 標準形を数値的に計算するための標準的な方法であるが、一方、この方法では J 基底を計算することはできない。J 基底を計算するアルゴリズムとして文献②があるが、非ユニタリーな変換を利用するため、数値的安定性の確保に問題がある。

K 問題は、一般に非正方な行列束（A, B）が任意に与えられたときに、（A, B）のクロネッカ標準形（以下 K 標準形）K（λ）、および、（A−λB）P=QK（λ）を満たす可逆行列 P、Q（以下 K 基底）を同時に決定する問題である（文献③）。K 問題を解くことにより行列束（A, B）の代数的、幾何的性質を全て明らかにすることができる。任意に与えられた行列束（A, B）の K 問題を（K 基底を含めて）数値的に解く方法が確立できれば、行列束がシンギュラーの場合も含む（したがって最も一般性の高い）一般固有値問題（GEP）の一般解を数値的に計算する（任意の λ に対して A−λB の核を計算する）ことが可能になる。GEP の固有値 λ は K 標準形から定まるが、固有ベクトルを決定するには K 基底の計算が必要になる。また、一般の GEP は λ に関する多項式解を持つことが知られており、多項式解の存在は K 標準形から示せる一方、多項式解の表示を具体的に与えるためには K 基底の計算が必要になる。このように、GEP の求解には K 標準形のみならず、K 基底を含めて K 問題を解くことが重要になる。

K 問題に関する主要な既存研究として文献④、⑤がある。文献④、⑤では所与の行列束を一般上三角（GUPTRI 型）行列束に帰着して K 標準形を決定する GUPTRI アルゴリズムが提案されている。GUPTRI アルゴリズムは数値線形代数に係る事実上の世界標準ライブラリである LAPACK にも実装されている信頼性の高いアルゴリズムであるが、K 標準形は計算できる一方、K 基底を計算することはできない。したがって、当該行列束に係る GEP に関して、GUPTRI アルゴリズムでは固有ベクトルを計算することはできない。

以上のように、J 問題についてはユニタリー変換ないしは SVD をベースにした数値解法の確立、K 問題については（同様にユニタリー変換ないしは SVD をベースに）K 標準形のみならず K 基底も計算できるアルゴリズムの確立が重要な課題になっている。

2．研究の目的

J 問題および K 問題に関して、ユニタリー変換ないしは SVD をベースにした信頼性の高い数値解法を設計し、また、当該数値解法の信頼性の高いプログラム実装法を確立する。K 問題に係る開発コードを GEP や平面幾何へ適用し、有効性を検証する。

3．研究の方法

一般に、行列束（A, B）に対する K 問題は、行列束が正方で B が単位行列のときには A に対する J 問題に帰着する。この意味で J 問題は K 問題のサブセットをなしている。（一般に、レギュラーな行列束に対する K 標準形は実質的に J 標準形に相当するもののみで構成される。）したがって、まず J 問題に対する数値的安定性の高い数値解法を確立し、その成果を K 問題の数値解法に活用する方針をとる。

本研究に先立ち、予備的な研究成果として、J 問題に関して文献⑥を、また、K 問題に関して文献⑦を公表している。文献⑥、⑦ではそれぞれ、正方行列に対する J 標準形、行列束に対する K 標準形の存在に関する帰納的

かつ構成的なオリジナルな証明を与え、証明法に直接沿う形でＪ問題およびＫ問題の素朴な数値解法を提案している。本研究はこれらの数理的な成果をベースに実施する。

まず、ユニタリー変換を活用した標準的な前処理を導入する。これは、文献⑥ないしは⑦の段階での固有値は既知とする仮定の除去、数値的安定性の確保、また、演算量削減のために必須な要件である。本研究の肝は前処理後の処理、すなわち、前処理によって得られる特殊な型の行列ないしは行列束に対する高精度かつ高効率なアルゴリズム設計であり、これに係る数理的考察、アルゴリズム設計後のプログラム実装、開発コードの有効性の検証を順次行う。

Ｊ問題（ないしはＫ問題）は入力行列（ないしは入力行列束）に対する微小な摂動に極めてセンシティブな場合もあり、数値誤差に関する考察が重要である。そこで、種々の悪条件問題に対して実装プログラムを適用し、数値誤差を検証するとともに、アルゴリズムの改善を図る。

Ｋ問題数値解法の応用として、任意の行列束に付随する GEP の求解や平面幾何（２つの平面代数曲線の交点を求める問題）へ開発コードを適用し、その有効性を検証する。

４．研究成果

主たる研究成果として、J 問題に関して、ブロックシューア標準形（BSF）を経由して J 問題を数値的に安定かつ高効率に解くためのアルゴリズムの設計、プログラム実装を行った。また、J 問題に対するこの成果を活用し、K 問題に関して、GUPTRI 型行列束に対する K 問題を数値的に安定かつ高効率に解くためのアルゴリズムを設計し、これに基づくプログラム実装を行った。この結果、任意の行列束に対する K 問題を、標準的な前処理（GUPTRI アルゴリズム）と組み合わせて数値的に安定に解くためのアルゴリズムが確立できた。これにより、行列束がシンギュラーの場合も含め、任意の行列束に係る GEP の一般解を数値的に求めることが可能になった。

J 問題、K 問題の各々について詳細は概ね以下のとおりである。

⑴ J 問題

① 所与の（一般に多重固有値を持つ）正方行列を、ユニタリー行列を用いた相似変換で BSF に帰着する標準的な前処理をアルゴリズムに導入し、これにより、固有値を既知とする仮定の除去、演算量の大幅削減、数値的安定性の確保が可能になった。また、前処理によって得られた BSF に対する J 問題を高速かつ高精度に解くためのアルゴリズムを設計した。数値実験の結果、良条件問題については文献①、②の方法と同等、一部の悪条件問題については文献①、②を上回る数値精度が確保できることを示した。成果の一部は雑誌論文①で公表した。

② 前述のとおり、J 問題は K 問題のサブセットをなしており、以上により、K 問題の数値解法を設計する上での実用的なツールを得ることができた。

⑵ K 問題

① まず、K 標準形が L 型のみから構成される generic な横長行列束に対する K 問題の数値解法を検討し、この場合には行列束に構成的な階層構造が存在することを見出し、この構造を活用して K 問題の再帰的数値解法を設計した。

この方法は、K 標準形が L 型行列の転置行列のみから構成される generic な縦長行列束の K 問題にも直ちに適用可能である。

J 問題の数値解法に関する研究成果と併せ、以上により、GUPTRI 型行列束の対角ブロックに相当する小行列束各々に対する K 問題の数値解法の設計に成功した。

② GUPTRI 型行列束の対角ブロックに相当する小行列束各々に対する K 問題が解けているとき、それらの小問題の解をベースに GUPTRI 型行列束全体に対する K 問題の解を得るためのアルゴリズムを設計した。

③ ①および②を総合し、任意の GUPTRI 型行列束に対する K 問題の数値解法が確立できた。したがって、GUPTRI アルゴリズムと併せることで、任意の行列束に対する K 問題の数値解法が確立できた。

④ ③の結果、任意の GEP に対して、多項式解を含む一般解が数値的に得られるようになった。

⑤ K 問題の応用として、開発コードを２つの平面代数曲線の交点を求める問題（文献⑧の定式化に基づく）に適用し、数値的に一定の精度で解けることを確認した。また、曲線の一方がある generic な条件を満たす２次曲線の場合には、射影変換を用いて当該２次曲線を原点を中心とする単位円に移せることから、この座標変換を用いると数値精度が大幅に向上されることを示した。

＜引用文献＞

① G. H. Golub, J. H. Wilkinson, ‘Ill-conditioned eigensystems and the computation of the Jordan canonical form’, SIAM Rev., Vol.18 (1976) pp.578-619.

② B. Kagstrom, A. Ruhe, ‘An algorithm for numerical computation of the Jordan normal form of a complex matrix’, ACM Trans. Math. Software, Vol.6 (1980) pp.398-419.

③ F. R. Gantmacher, ‘The theory of matrices’, Vol.II, Chelsea, New York, 1959.

④ J. Demmel, B. Kagstrom, ‘The generalized Schur decomposition of an arbitrary pencil A-λB: Robust software with error bounds and applications. Part I: Theory and algorithms', ACM Trans. Math. Software, Vol.19 (1993) pp.160-174.

⑤ J. Demmel, B. Kagstrom, 'The generalized Schur decomposition of an arbitrary pencil A-λB: Robust software with error bounds and applications. Part II: Software and applications', ACM Trans. Math. Software, Vol.19 (1993) pp.175-201.

⑥ K. Kudo, Y. Kakinuma, K. Hiraoka, H. Hashiguchi, Y. Kuwajima, T. Shigehara, 'Algorithm for computing Jordan basis', JSIAM Letters, Vol.2 (2010) pp.119-122.
https://www.jstage.jst.go.jp/article/jsiaml/2/0/2_0_119/_pdf

⑦ Y. Kakinuma, K. Hiraoka, H. Hashiguchi, Y. Kuwajima, T. Shigehara, 'Algorithm for computing Kronecker basis', JSIAM Letters, Vol.1 (2009) pp.60-63.
https://www.jstage.jst.go.jp/article/jsiaml/1/0/1_0_60/_pdf

⑧ B. Plestenjak, 'Singular two-parameter eigenvalue problems and bivariate polynomial systems', ILAS 2010.

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計１件）
①Takuya Matsumoto, Kenji Kudo, Yutaka Kuwajima, Takaomi Shigehara, 'Algorithm for solving Jordan problem of block Schur form', JSIAM Letters, Vol.4 (2012) pp.9-12.（査読あり）
https://www.jstage.jst.go.jp/article/jsiaml/4/0/4_0_9/_pdf

〔学会発表〕（計１０件）
①奥島　昇太、桑島　豊、重原　孝臣、二つの平面代数曲線の交点の高精度計算、日本応用数理学会「行列・固有値問題の解法とその応用」研究部会第 22 回研究会、2016 年 11 月 25 日、東京大学本郷キャンパス（東京都・文京区）

②瀬下　史人、桑島　豊、重原　孝臣、クロネッカ基底計算アルゴリズムを用いた二つの二次曲面の交線の計算、電子情報通信学会東京支部学生会「研究発表会」、2016 年 3 月 5 日、東海大学高輪キャンパス（東京都・港区）

③平松　伸也、桑島　豊、重原　孝臣、ジョルダン基底計算アルゴリズムの精度向上、電子情報通信学会東京支部学生会「研究発表会」、2016 年 3 月 5 日、東海大学高輪キャンパス（東京都・港区）

④久保田　将司、桑島　豊、重原　孝臣、クロネッカ基底計算アルゴリズムの精度向上について、日本応用数理学会 2014 年度年会、2014 年 9 月 3-5 日、政策研究大学院大学（東京都・港区）

⑤久保田　将司、桑島　豊、重原　孝臣、クロネッカ基底計算アルゴリズムによる一般固有値問題の解法、日本応用数理学会 2014 年研究部会連合発表会、2014 年 3 月 19-20 日、京都大学吉田キャンパス（京都府・京都市）

⑥久保田　将司、桑島　豊、重原　孝臣、GUPTRI 型行列束への前処理を伴うクロネッカ基底計算アルゴリズムの評価、日本応用数理学会「行列・固有値問題の解法とその応用」研究部会第 16 回研究会、2013 年 12 月 26 日、東京大学本郷キャンパス（東京都・文京区）

⑦小林　雅統、桑島　豊、重原　孝臣、ジョルダン基底計算アルゴリズムの精度向上について、日本応用数理学会「行列・固有値問題の解法とその応用」研究部会第 16 回研究会、2013 年 12 月 26 日、東京大学本郷キャンパス（東京都・文京区）

⑧久保田　将司、桑島　豊、重原　孝臣、一般上三角行列束に対するクロネッカ基底計算アルゴリズムの構築（２）、第 42 回数値解析シンポジウム、2013 年 6 月 12-14 日、松山道後温泉道後舘（愛媛県・松山市）

⑨久保田　将司、桑島　豊、重原　孝臣、一般上三角行列束に対するクロネッカ基底計算アルゴリズムの構築（１）、第 41 回数値解析シンポジウム、2012 年 6 月 6-8 日、伊香保温泉 よろこびの宿 しん喜（群馬県・渋川市）

⑩小林　雅統、松本　拓也、桑島　豊、重原　孝臣、ジョルダン基底計算アルゴリズム JBA-BSF の悪条件問題への適用、第 41 回数値解析シンポジウム、2012 年 6 月 6-8 日、伊香保温泉　よろこびの宿　しん喜（群馬県・渋川市）

６．研究組織
(1)研究代表者
　重原　孝臣（SHIGEHARA, Takaomi）
　埼玉大学・大学院理工学研究科・教授
　研究者番号：６０２０６０８４

(2)研究分担者
　桑島　豊（KUWAJIMA, Yutaka）
　埼玉大学・大学院理工学研究科・助教

研究者番号：４０４５１７３６