

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 5 月 22 日現在

機関番号：15401

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2011～2014

課題番号：23560070

研究課題名(和文) 離散・超離散系の保存量と可積分性の研究

研究課題名(英文) Studies on conserved quantity and integrability for discrete and ultradiscrete systems

研究代表者

伊藤 雅明(Ito, Masaaki)

広島大学・工学(系)研究科(研究院)・准教授

研究者番号：10116535

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,400,000円

研究成果の概要(和文)：Lyness方程式を超離散化したLyness max 方程式に対しては、具体的な高次の保存量を求め、その保存量の一般的な構造を明らかにするために、derivative Lyness方程式の具体的な保存量を見出した。また、非線形方程式に対する数式处理的・数値的なアプローチとして、球面的距離により修正されたPoiseuille流の厳密解や双曲的計量によるPoiseuille流れを表す方程式を導出した。

研究成果の概要(英文)：We found higher order conserved quantities for the Lyness max equation which is a ultradiscrete version of the Lyness equation. To clarify the structure of the conserved quantities of the Lyness max equation, we found several conserved quantities for the derivative Lyness equation. As a computer algebra and a numerical approach, we found an exact solution to Poiseuille flow whose velocity field is spherical paraboloid, and derived a Poiseuille flow in hyperbolic metric.

研究分野：応用数学

キーワード：非線形方程式 離散方程式 超離散 保存量 数式処理

1. 研究開始当初の背景

ソリトンと呼ばれる衝突に対しても安定な孤立波解は非線形現象を理解する上で重要な役割を果たしてきた。ソリトン解が存在する微分方程式は KdV 方程式を始めとして数多く発見されてきたが、それらの方程式には幾つかの共通する性質があり、その一つが可積分性に通じる無限個の保存量や N ソリトン解の存在である。我々は N ソリトン解や保存量の存在を基にして幾つかの新しい可積分な方程式を発見してきた。その研究の中で、与えられた非線形偏微分方程式の具体的な保存量や対称性を求めるアルゴリズムを作り、それを実現する数式処理 (REDUCE) プログラムを開発してきた。また、ソリトンは非線形偏微分方程式にのみ存在するのではなく、独立変数が離散化された非線形離散方程式にも存在することが知られている。さらに最近では、従属変数までも離散化された超離散方程式にもソリトン現象が見つかり、超離散方程式が注目されるようになってきた。しかし、超離散方程式に対する保存量の研究はまだ十分になされていないのが現状である。

2. 研究の目的

従属変数までも離散的な値に限定される超離散系を含む離散系の保存量を探索する効率的なアルゴリズムを開発し、数式処理システム上に実現する。また、開発されたシステムを用いて具体的な保存量を求め、それを基にして保存量の構造を明らかにし、可積分性の判定を行うことが本研究の目的である。

3. 研究の方法

(1) 有理式型の完全離散方程式 (偏離散方程式) の保存量探索アルゴリズムの開発としては、方程式および保存則のスケール不変性を利用した未定係数法を用いる。ただし、そのためには数千～数万もの未知変数に対する連立代数方程式を解析的に解かなくてはならないため、数式処理を用いて解析的に解く前に、前処理として、数値的に未知変数のゼロ判定を行う方法と、剰余列による多項式表現を用いて自明な解を削除する。

(2) 陰的な離散方程式の保存量探索アルゴリズムの開発としては、既に開発した正規形の陰的な多項式型離散方程式に対する保存量探索アルゴリズムを、非正規な有理式型方程式に使えるように拡張する。

(3) 有理式型離散方程式の一つである k 階の Lyness 方程式については、より高次の保存量の探索を行い、Lyness 方程式の保存量の構造を明らかにする。

(4) 超離散系については、既に開発している max-plus 代数の演算を行うためのアルゴリズムを用いて、超離散方程式の保存量を求めるためのアルゴリズムを作成し、超離散方

程式の一つである Lyness max 方程式の具体的な保存量や、max type のいろいろな超離散方程式の保存量の構造を調べる。

4. 研究成果

(1) 一様なランクをもつ差分方程式の保存量を逐次的に構成するアルゴリズムを作成し、そのアルゴリズムを実現するプログラムを数式処理システムを REDUCE 上に作成した。このプログラムにより、有理式型の保存量の分母分子の各々の次数を考慮しなくても探索することができるようになった。具体例としては、有理式型の離散方程式の一つである Lyness 方程式の高次保存量を具体的に求めることができた。これらの保存量の構造を基にして、Lyness 方程式の一般的な次数の保存量の具体的な形を求める MAPLE プログラムを作成した。さらに、ランクが一様でない離散方程式に対しても上記のアルゴリズムが適用できるように、ダミーの重みを持った変数を導入することによって、より一般的な離散方程式に対しても保存量を求めることができるようになった。

(2) Lyness 方程式の従属変数を超離散化した k 階の Lyness max 方程式については、第 1、第 2、第 3 の具体的な保存量を求め、元の Lyness 方程式に対応する保存量が存在することを示した。また、これらの保存量が互いに独立であることをカソラチ行列式を用いて証明した。この結果については、ギリシャで開かれた国際会議 (The 6th World Congress of Nonlinear Analysts) において発表した。さらに、Lyness max 方程式の一般的な n 次の保存量を求めるための準備として、derivative Lyness 方程式に対応する derivative Lyness max 方程式を導いたが、 n 次の保存量の構造についてはまだ解決には至っておらず、今後の問題として残されている。

(3) 対称性および保存量の探索プログラムを用いて、無限個の保存量をもつ連立偏微分方程式である coupled KdV 型の方程式を見つけていたが、この方程式の解の構造はまだ十分には解明されていないため、離散化または超離散化はまだ行われていない。この方程式の超離散化の第一段階として、保存量の立場から独立変数を離散化した方程式の候補を見いだした。

(4) 離散化は数値計算の立場からも重要であるが、数値計算には演算によって誤差が生じる問題がある。そこで、代数計算に対して、その計算結果が計算順序によらない算法で代用するという手法を提案し、与えられた代数に最も近い結合代数を見つけるという幾何学的問題の定式化を行った。この手法によって、数値計算の上でも精度の良い結果が得られることを示した。

(5) 粘性流体の運動を支配する非線形偏微分方程式である Navier-Stokes 方程式に対して、数式処理的・数値的アプローチとして、球面的距離により修正された Poiseuille 流の厳密解や双曲的計量による Poiseuille 流れを表す方程式を導出した。

5. 主な発表論文等
(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 8 件)

下村哲, 伊藤雅明, 平岡賢治, コンピュータを活用した数学的モデリング(III), 広島大学大学院教育学研究科紀要, 査読有り, 63 巻, 2014, 29-37

Fujio Kubo, "Radical zero" forces a finite dimensional associative algebra to have a unity, Proc.29th Summer seminar on Lie algebras and related topics, 査読なし, Vol. 1, 2014, 1-4

F. Suenobu, M. Ito and F. Kubo, Algebras over floating point numbers, JP J. Algebra Number Theory Appl., 査読有り, 31, 2013, 51-74

Y. Hataya, M. Ito and M. Shiba, A Poiseuille Flow of an Incompressible Fluid with Nonconstant Viscosity, Nonlinear Dynamics and Systems Theory, 査読有り, Vol. 13 No.1, 2013, 47-54

Y. Hataya, M. Ito and M. Shiba, Poiseuille flow with spherical paraboloid velocity, Збірник праць Ін-ту математики НАН України, 査読有り, 10, N 4-5, 2013, 155-161

F. Kubo, Deformation theory of low Dimensional algebras, Proc.28th Summer seminar on Lie algebras and related topics, 査読なし, 2013, 6-13

F. Suenobu and F. Kubo, Study on algebra structures in terms of geometry and deformation theory, Contemporary Ring Theory 2011, 査読有り, 2012, 144-1

Fujio Kubo and Fumiya Suenobu,

On the associative algebra structures closest to algebra structures, Journal of Algebra and Its Applications, 査読有り, 10, 2011, 365-376

[学会発表](計 10 件)

柴雅和・山口博史, 開リーマン面の閉リーマン面への等角的埋め込み --- 周期行列の極値的性質, 日本数学会, 2014 年 9 月 25 日, 広島大学

柴雅和, 山口博史, 開リーマン面の閉リーマン面への等角的埋め込み --- 実現された理想境界の形状, 日本数学会, 2014 年 3 月 15 日, 学習院大学

柴雅和, 開リーマン面の接続, 研究集会「リーマン面論の展望」, 2013 年 12 月 7 日, 山口大学理学部

柴雅和, Univalent functions on a Riemann surface, The 2nd GSIS-RCPAM International Symposium "Geometric Function Theory and Applications in Sendai", 2013 年 9 月 13 日, 東北大学

久保富士男, ポリアの数え上げ理論と母関数, 第 17 回幾何学研究集会, 2013 年 8 月 24 日, 広島ガーデンパレス

久保富士男, "Radical zero" forces a finite dimensional associative algebra to have a unity, 第 29 回リー代数サマーセミナー, 2013 年 8 月 23 日, 大阪樟蔭女子大学

Masaaki Ito and Min Gao, Invariants for the kth-Order Lyness Max Equation, The 6th World Congress of Nonlinear Analysts, 2012 年 06 月 25 日, アテネ大学, ギリシャ

幡谷泰史, 伊藤雅明, 柴雅和, 非ユークリッド的 Hagen-Poiseuille 法則, 日本数学会 中国・四国支部例会, 2012 年 1 月 22 日, 岡山大学環境理工学部

幡谷泰史, 伊藤雅明, 柴雅和, 球面的距離により修正された Poiseuille 流, 日本数学会, 2011 年 10 月 1 日, 信州大学

Fumiya Suenobu and Fujio Kubo, Study on algebra structures in terms of geometry and deformation theory, The sixth China Japan

Korea International Conference on
Ring theory, 2011年7月1日, Suwon
(Korea)

〔図書〕(計 2 件)

柴 雅和, “複素関数論”, 朝倉書店
2013, 228pp.

F. Suenobu and F. Kubo,
Contemporary Ring Theory 2011,
World Scientific Pub Co Inc, 2012,
235

6. 研究組織

(1) 研究代表者

伊藤 雅明 (ITO, Masaaki)
広島大学・大学院工学研究院・准教授
研究者番号: 10116535

(2) 研究分担者

柴 雅和 (SHIBA, Masakazu)
広島大学・大学院工学研究院・名誉教授
研究者番号: 70025469

久保 富士男 (KUBO, Fujio)
広島大学・大学院工学研究院・教授
研究者番号: 80112168