

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 11 日現在

機関番号：32657

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2011～2013

課題番号：23560541

研究課題名(和文)任意階数の微分係数に制約可能な最適スプラインの研究

研究課題名(英文)Optimal Splines with Constraints on Derivatives of Arbitrary Degree

研究代表者

狩野 弘之 (Kano, Hiroyuki)

東京電機大学・理工学部・教授

研究者番号：00246654

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,800,000円、(間接経費) 1,140,000円

研究成果の概要(和文)：スプライン関数は多様な分野で用いられる実用性の高い関数であり、その研究、使用の歴史は長い。しかしスプラインが区分的に定義された関数であるという事実は、多様な曲線の設計や局所的な取り扱いを可能にするが、一方でその設計は煩雑になる。本研究では整然とした理論とアルゴリズムの導出を目標に、特に制約条件のある場合に対する理論とアルゴリズムについて集中的に研究し様々な研究成果を得た。ロボット軌道計画における位置、速度、加速度への制約のような様々な条件を組合せ、統一的に扱える方法を導いた。Bスプラインによる方法と制御論による方法の2通りを用いた。

研究成果の概要(英文)：Spline functions have been used as powerful tools for designing curves and surfaces in many fields of engineering and science such as computer aided design, numerical analysis, image processing, robotics, data analysis, etc. However, the fact that splines are piecewise functions leads to complicated treatments and in this study we develop a concise and systematic method for constructing optimal smoothing splines. In particular, we pay special attention to constrained splines, where various types of constraints can be imposed on designing curves and surfaces. The types of constraints include pointwise constraints, interval constraints, constraints on derivatives and integrals, either as equalities and/or inequalities. We developed theories and algorithms for interpolating and smoothing optimal splines with these constraints in a unified framework. We employed both B-spline approach and control theoretic approach.

研究分野：工学

科研費の分科・細目：電気電子工学・制御工学

キーワード：平滑化スプライン Bスプライン 制御スプライン 曲線曲面 等式不等式制約 2次計画法 軌道計画
形状モデリング

1. 研究開始当初の背景

スプライン関数は多様な分野で用いられる実用性の高い関数であり、その研究、使用の歴史は長く多くの研究がされてきた(例えば de Boor, *A practical guide to splines*, Revised Edition, Springer-Verlag, New York, 2001). 一方、制御論の立場からの研究(動的スプライン)が C. F. Martin (Texas Tech Univ.)らの研究グループによって、スプラインの研究としては比較的新しく 1990 年代から始められた(例えば M. Egerstedt and C. Martin, *Control Theoretic Splines - Optimal Control, Statistics and Path Planning*, Princeton University Press, 2010). 本研究従事者もほぼ同時期にスプラインの研究を開始しており、その後まもなく Martin らとの本格的な共同研究を始めた。2003 年には最初の共著学術誌論文を発表し、その後も共同研究を継続している。

スプラインが区分的に定義された関数であるという事実は、多様な曲線の設計や局所的な取り扱いを可能にするが、一方でその設計は煩雑になる。本研究従事者らは、特に整然とした理論とアルゴリズムの導出を目標に、科学研究費補助金による研究(狩野(研究代表者)、「制御論的アプローチによる最適スプラインの理論およびその応用」(平成 16-17 年度)、「最適平滑化スプラインの一般化理論とプログラムライブラリの開発」(平成 19-20 年度)、科学研究費補助金基盤研究(C))を行い、理論面、応用面ともに大きく進展した。同時に今後の重要な課題も明らかになり、特に制約条件のある場合に対する理論と応用の重要性を強く感じた。スプライン研究を制約付き問題の切り口から集中して研究し発展させることが必要と確信し、研究を開始した。本研究従事者らの知る限り、このような研究は国内外とも他に殆ど行われていない。

2. 研究の目的

本研究の目的は、制約を受けるスプラインの問題に限定、集中し、最適設計理論とアルゴリズムを導出し、数値実験等を通じて様々な問題への応用の可能性を検証することである。研究のアプローチは、B スプラインを基底関数として用いる方法と動的システムをスプライン生成器として用いる方法の 2 通りを用いる。両者は、問題に応じてそれぞれの特徴が生かせる方法を用いる。

制約付き最適スプラインについて述べる。最適スプラインの基本問題は、「与えられたデータ点に対して、それらの点あるいはその近くを通り、かつ滑らかな曲線や曲面を構成する」問題である。B スプラインによる方法では、スプライン $x(t)$ を k 次 B スプライン関数を基底関数として構成し、一方、動的システムによる方法ではスプラインを線形制御システムの出力として構成する。制約付き問題では、この $x(t)$ について、任意階数の微分値、関数値や積分値に対する等式・不等式条

件、ある点での条件・ある区間にわたる条件、線形・非線形条件など、様々な条件を加えることによって所与の制約をみたす最適スプライン曲線や曲面を設計する。

本研究では、以上の問題の背景と設定のもと、以下の課題に取り組み解決する。

(A) B スプラインによる制約付きスプラインの理論とアルゴリズム: B スプラインを基底関数として用いる場合について、微分係数に制約を受ける最適スプラインの設計と軌道計画などへの応用を行い、2 変数スプラインへの拡張、をする。

(B) 動的システムによる制約付きスプラインの理論: 動的システムを用いる場合について、(1) システムの状態ベクトルや出力が制約を受ける場合の最適スプライン生成法、を導きまたデータ集合が逐次的に与えられる場合のスプライン構成法およびその応用、を行う。

(C) 制約付きスプラインの非線形問題への拡張と応用: 課題(A), (B)において得られた結果の非線形問題への発展、拡張を行う。非線形性は、等式、不等式条件そのものが非線形で与えられる場合、特に 2 次の制約や球面上への制約など、を考える。

3. 研究の方法

上述の課題をさらに具体化し、各々の課題についての研究の方法を詳しく述べる。

(1) 制約付きスプライン基礎:

スプライン $x(t)$ は制御点の調節によって任意の k 次多項式スプラインを設計できる。その際、 $x(t)$ の任意階数導関数に対する制約を制御点に関する制約として定式化する。制約は点制約、区間制約、積分制約などを考え、かつ等式、不等式の条件を考慮する。これらの条件は互いに矛盾のない限り、様々な組み合わせも可能にする。研究方法としては、微分条件では事実 A「 $x(t)$ の p 階微分もスプラインであり、その制御点は元の制御点系列の p 階差分となる」ことを使用する。その結果、多くの問題は 2 次計画問題(QP 問題)に帰着できる。QP 問題には有効な数値計算法があり、それを利用する。応用として、ロボットの軌道計画問題(位置、速度、加速度に制約)、例えば速度に台形状の不等式制約を加える場合などを考える。

(2) monotone スプラインに対する十分条件:

スプライン $x(t)$ に対する等式制約条件は制御点に関する等価な条件として定式化できる。しかし不等式条件の場合の制御点への条件は一般に十分条件である。本研究ではこの条件を緩和し、より必要条件に近い条件を導出する。特に F. N. Fritsch and R. E. Carlson らの論文 'Monotone Piecewise Cubic Interpolation, SIAM J. Numer. Anal., Vol.17, pp.238-246, 1980' を参考にする。

(3) 多変数スプラインと形状モデリング:

上記課題(1)の2変数スプライン $x(s,t)$ への拡張を行う。考慮する制約条件は、 $x(s,t)$ の任意階数の偏導関数に対して、例えば点条件や区間条件、さらに領域条件等となる。積分条件も考える。上記の事実Aの2変数の場合への拡張も行う。応用として柔軟体の運動形状モデリング(周期性条件)やデジタル画像処理(輝度値や境界に制約)、偏微分方程式の解法(境界条件)を考える。

(4) 多次元制約スプラインと軌道計画：

複数のスプラインをベクトルとしてまとめたベクトル値スプライン関数を扱う。この場合、各制御点はベクトルとして扱われる。例えば平面内あるいは空間内の軌道計画の問題では、ベクトルはそれぞれ2次元および3次元となる。制約条件はベクトルの各要素間で互いに干渉しあう条件になるときが本質的な問題となる(互いに独立した制約の場合は個々のスプラインを独立して構成すればよい)。

(5) 制御論スプラインにおける制約：

適当な1入力1出力線形システムをスプライン生成器とみなしスプラインを生成する。システム入力と初期状態から構成される評価関数を最小化する最適制御問題として定式化する。等式、不等式、点や区間での制約条件を、システムの入力 $y(t)$ および状態 $x(t)$ に関する制約として定式化し、制約付きスプラインを設計する。また逐次的最適スプライン生成法、すなわちデータ集合が逐次的に得られる場合の最適スプライン生成法を導出する。代表的な応用例はロボティクス分野で知られている SLAM 問題 (Simultaneously Localization and Mapping) である。

(6) 非線形制約を受ける最適スプライン：

スプライン $x(t)$ に対する制約条件が非線形の場合について、最適スプラインの生成法を導出する。制約条件は2次の非線形性、および球面状に限定する球面スプラインを扱う。後者ではいわゆるステレオ投影法 (stereographic projection) を用いる場合、およびクォータニオンの理論を用いる場合の二通りを考える。

4. 研究成果

以下では研究の方法で述べた各項目ごとに得られた結果を説明する。

(1) 制約付きスプライン基礎：

Bスプラインによるスプライン $x(t)$ の構成法に基づき、 $x(t)$ およびその任意階数の導関数、さらに積分値などに制約を加える方法およびアルゴリズムを導出した。制約は点制約、区間制約、等式、不等式などを含み、矛盾のないかぎりそれらを組み合わせることができる。例を以下に示す。

図1は、典型的な制約付きスプラインの問題であるロボット等の軌道計画問題に対する結果を示す。軌道 $x(t)$ は $x(0)=0$ での静止状態から $x(1)=1$ の静止状態まで、途中3時刻でいわゆる区間補間をみだし、かつ滑らかな軌道として計画する。横軸を t としたときの5次スプライン $x(t)$ の結果が図1の上図(青線)である。軌道の計画では、もちろん速度や加速度に制約を受けるのが普通であり、それらの不等式条件をも考慮してある。図1の中図、下図がそれぞれ速度、加速度を表す。青の実線がその結果であり、いずれも点線で表す限界値内にとどまっている。なお赤線はこれらの制約条件を考慮しない場合の結果である。良好な結果が得られていることがわかる。

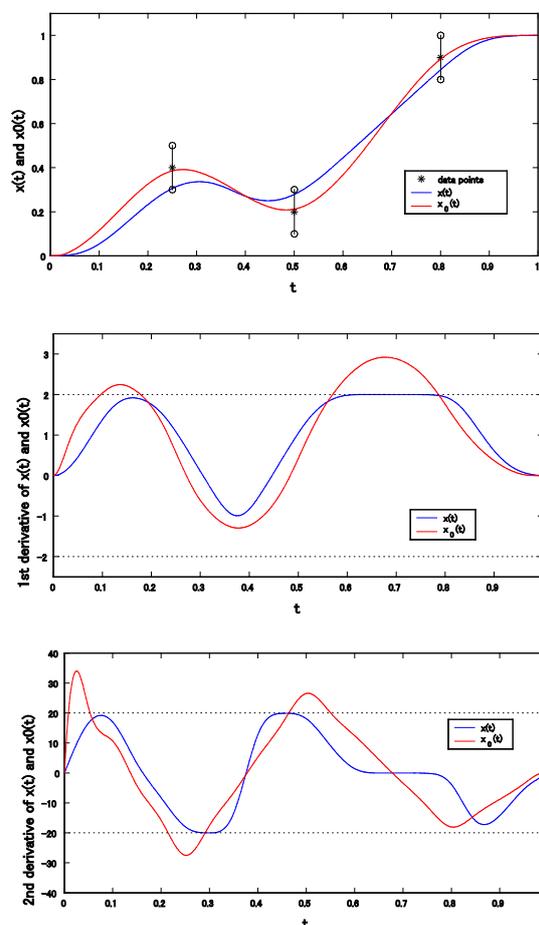


図1：5次スプラインによる軌道計画(上：位置、中：速度、下：加速度)

(2) monotone スプラインに対する十分条件：

スプライン $x(t)$ に対する条件が不等式の場合、制御点への条件は一般に十分条件となっている。本研究ではこの条件を緩和し、より必要条件に近い条件を導出した。

その例を図2に示す。図は $x(t)$ がある節点区間で0以上となるための条件を表している。従来の第1象限で与えられる十分条件が第2、第4象限の一部をも含む領域(必要条件により近い)に条件が緩和されている。

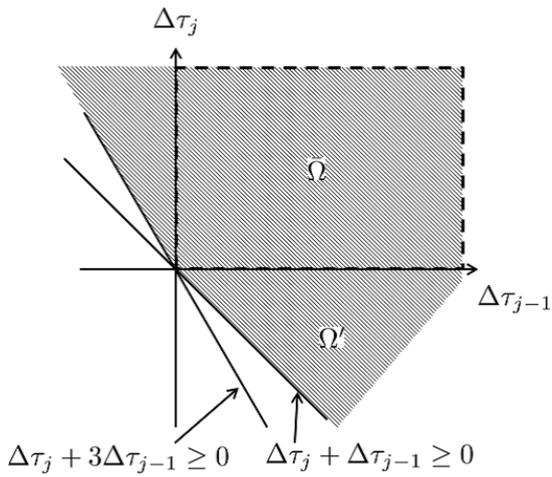


図2：制御点に対する制約十分条件の緩和

(3) 多変数スプラインと形状モデリング：

まず2変数スプライン $x(s,t)$ への拡張を行った。特に $x(s,t)$ の任意階数の偏導関数に対して、点条件や区間条件、さらに領域条件等としての制約条件を考え、また積分条件も導出した。1変数の場合の結果が自然な形で拡張され、さらに3変数の場合への拡張も行った。

図3は、2変数の場合に対する、いわゆる shape-preserving (形状保存) スプラインの1例である。与えられた少数のデータに対して上に凸(2階の偏導関数が0以下)の条件を加えて得られた曲面である。制約のない場合(下図)との比較からその効果は明らかである。

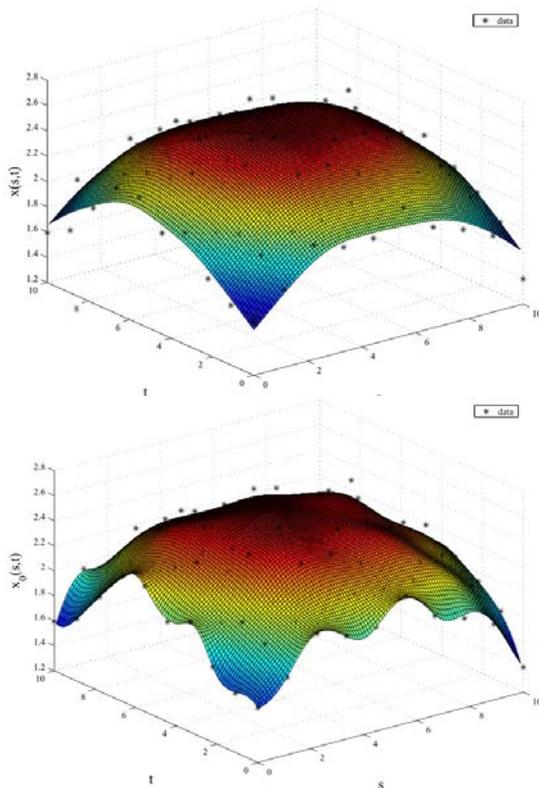


図3：Shape-Preserving スプライン(凸曲面，上：制約有り，下：制約無し)

また3変数の場合の最適スプライン $x(r,s,t)$ の例を図4に示す。これは赤血球の動的形状モデリングとして得られた変形運動の動画の1ショットである。閉曲面のため、3変数のうちの2変数に周期性条件を加えている。3変数目は時刻として用いた。

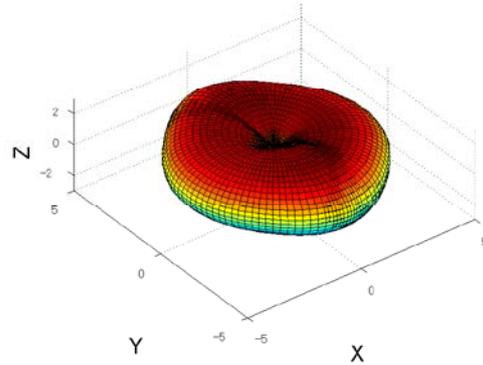


図4：3変数スプラインによる赤血球の動的形状モデリング

(4) 多次元制約スプラインと軌道計画：

ベクトル値最適平滑化スプラインの設計方法を導いた。制約条件はベクトルの各要素間に相互の干渉がある場合について、等式、不等式等の条件を考慮した。スカラーの場合の結果が自然な形でベクトルの場合に拡張できることを示した。

代表的な例としては、平面内あるいは空間内の軌道計画の問題がある。図5は2次元平面内での軌道計画の結果を示す。経路については破線で示す領域内の通行可能との制約を加え、また速度や加速度にも制約を加えた。制約の有無(青線：有り，緑線：無し)の差が良くわかる。

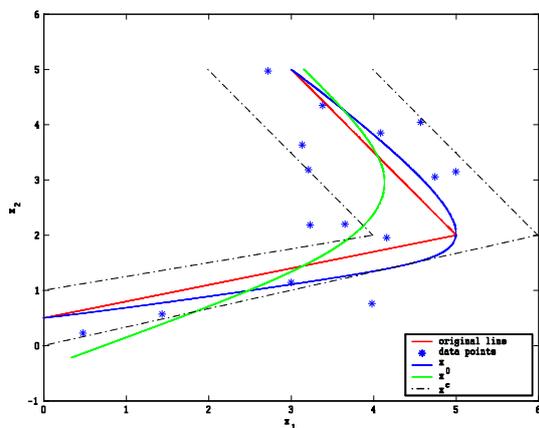


図5：制約付ベクトルスプラインによる軌道計画

(5) 制御論スプラインにおける制約：

1入力1出力線形システムの制御問題を

解くことによって最適平滑化スプラインを生成する。この場合、最適制御のみならず初期状態も自由でありその最適値を求める。等式、不等式、点や区間での制約条件を、システムの出力 $y(t)$ および状態 $x(t)$ に関する制約として定式化し、制約付きスプラインを設計した。また逐次的最適スプライン生成法、すなわちデータ集合が逐次的に得られる場合の最適スプライン生成法を導出した。この方法は例えばロボティクス分野での SLAM 問題などに効果的に適用できる。

逐次的な方法の数値例の結果を図 6 に示す。距離センサーを備えた移動ロボット（緑の円）が、幾つかの姿勢で測定した周囲までの距離データに基づき、その周りの花形の壁面形状を再構成する問題である（図 6 上）。ロボットが 1 周分回転するたびにデータ集合が得られ、周期性条件の設定による閉曲面を作成する。回転を繰り返すたびに構成壁面が改善され、30 回目（図 6 下）では精度よく壁面形状が再構成された。

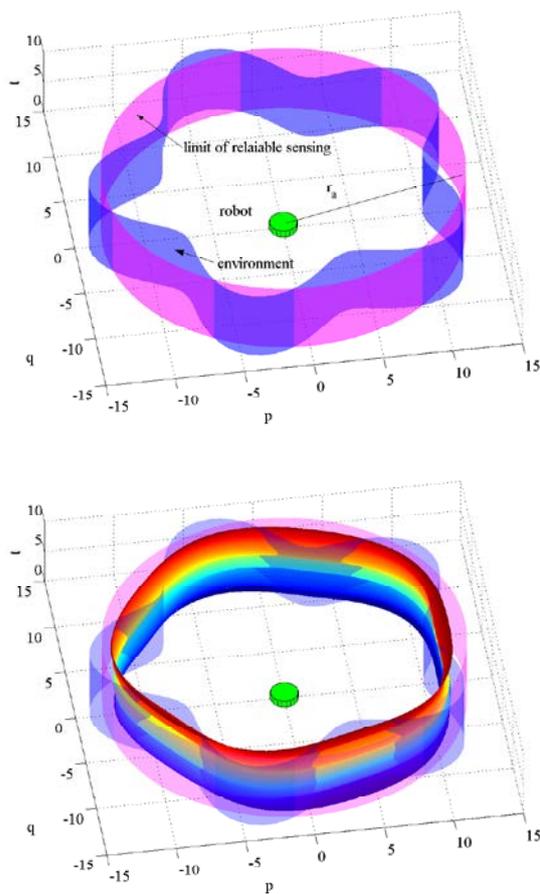


図 6 : 逐次的動的スプラインによる環境形状生成

(6) 非線形制約を受ける最適スプライン :

非線形の制約問題として 2 次の非線形性を検討した。この場合、評価関数、制約式と

もに 2 次式になり、最適平滑化スプラインはやはり QP 問題として定式化できた。また凸の制約条件の場合には、数値実験によって良好な結果を得ている。また球面状に限定する球面スプラインを検討した。特にいわゆるステレオ投影法を用いる場合やクォータニオンの理論を用いる場合の二通りを考え、数値実験によって良好な結果も得られている。

図 7 はステレオ投影法による球面上のスプラインの生成例である。5 個のデータから球面上の円の再構成した結果である。

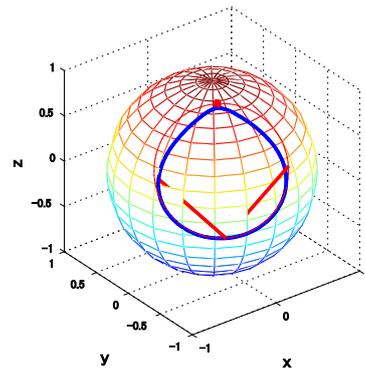


図 7 : ステレオ投影法による球面上最適平滑化スプライン

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 6 件)

(1) H. Fujioka, H. Kano and C. Martin, Constrained Smoothing and Interpolating Spline Surfaces using Normalized Uniform B-splines, Communications in Information and Systems, accepted (May 29, 2014).

(2) H. Kano, H. Fujioka and C. Martin, Optimal Smoothing Spline with Constraints on Its Derivatives, SICE Journal of Control, Measurement, and System Integration, Vol.7, No.2, pp.104-111, 2014.

(3) H. Fujioka and H. Kano, Monotone Smoothing Spline Curves Using Normalized Uniform Cubic B-splines, Trans. Institute of Systems, Control and Information Engineers, Vol.26, No.11, pp.389-397, 2013.

(4) H. Fujioka and H. Kano, Optimal Vector Smoothing Splines with Coupled Constraints, Trans. Institute of Systems, Control and Information Engineers, Vol.25, No.11, pp.299-307, 2012.

(5) H. Kano, H. Fujioka and C. F. Martin, Optimal smoothing and interpolating splines with constraints, Applied Mathematics and Computation, Vol.218, Issue 5, pp.1831-1844, 2011.

(6) H. Fujioka and H. Kano, Recursive

Construction of Optimal Smoothing Splines Generated by Linear Control Systems, Trans. Institute of Systems, Control and Information Engineers, Vol.24, No.6, pp.134-143, 2011.

[学会発表] (計 10 件)

(1) H. Kano and H. Fujioka, Trivariate Optimal Smoothing Splines with Dynamic Shape Modeling of Deforming Object, Preprints of The 19th IFAC World Congress, to be presented, Cape Town, South Africa, Aug. 24 - 29, 2014.

(2) H. Fujioka and H. Kano, Optimal Control Theoretic B-Splines with Constraints on Its Derivatives, Proc. of the 52nd IEEE Conf. on Decision and Control, pp.2115-2120, Florence, Italy, Dec. 10-13, 2013.

(3) H. Fujioka and H. Kano, Compression of Digital-Ink with Pen Slip Using Optimal L1 Smoothing Splines, Preprints of the 45th ISCIE Int. Symposium on Stochastic Systems Theory and Its Applications, pp.41-42, Okinawa, Nov.1-2, 2013.

(4) H. Fujioka and H. Kano, Dynamic Contour Modeling of Wet Material Objects by Periodic Smoothing Splines, Proc. of the 59th ISI World Statistics Congress (WSC), Special Topics Session on 'Two views of smoothing splines and related tools', pp.1149-1154, Hong Kong, August 25-30, 2013.

(5) H. Fujioka and H. Kano, Monotone Smoothing Spline Curves Using Normalized Uniform Cubic B-splines, Preprints of the 44th ISCIE Int. Symposium on Stochastic Systems Theory and Its Applications, pp.63-64, Tokyo, Nov.1-2, 2012.

(6) H. Fujioka and H. Kano, Recursive Motion Planning Using Optimal Vector Smoothing Splines with Cross-Coupled Constraints, Proc. of the 38th Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society (IECON 2012), pp.2756-2761, Montreal, Canada, October 25-28, 2012.

(7) H. Fujioka and H. Kano, Trajectory Planning Using Vector Smoothing Splines with Coupled Derivative Constraints, Proc. of 2012 IEEE International Conference on Mechatronics and Automation, pp.1744-1749, Chengdu, China, August 5-8, 2012.

(8) H. Fujioka and H. Kano, Optimal Smoothing Spline Surfaces with Constraints on Derivatives, Proc. of the 50th IEEE Conf. on Decision and Control and European Control Conf., pp.7819-7824, Orlando, Florida, USA, Dec. 12-15, 2011.

(9) H. Fujioka and H. Kano, Vector Optimal Smoothing Spline Curves with Constraints, Proc. of the 2011 IEEE International Symposium on Computer-Aided Control System Design (CACSD), pp.438-443, Denver, CO, USA, September 28-30, 2011.

(10) H. Fujioka and H. Kano, Recursive Construction of Optimal Smoothing Spline Surfaces with Constraints, Preprints of The 18th IFAC World Congress, pp.2278-2283, Milan, Italy, Aug. 28 - Sept. 2, 2011.

6. 研究組織

(1)研究代表者

狩野 弘之 (KANO HIROYUKI)

東京電機大学・理工学部・教授

研究者番号 : 00246654

(2)研究分担者

藤岡 寛之 (FUJIOKA HIROYUKI)

福岡工業大学・情報工学部・准教授

研究者番号 : 10349798

(2013年3月まで)