

**科学研究費助成事業 研究成果報告書**

平成 27 年 5 月 18 日現在

機関番号：11301

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2011～2014

課題番号：23653050

研究課題名(和文) 経済経営数学の直観的教授法の基礎研究

研究課題名(英文) Basic Research on Intuitive Approaches to Mathematics for Economists

研究代表者

秋田 次郎 (AKITA, Jiro)

東北大学・経済学研究科(研究院)・教授

研究者番号：10302069

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,500,000円

研究成果の概要(和文)：本研究計画は、経済数学教育におけるイメージを重視した直観的理解を促す為の教材ならびにカリキュラム開発を目的とする基礎研究を行うことを目的とし、幾何学的直観、経済学的直観、それ以外の直観につき、経済数学の入門段階からより高度な段階において組織的に直観的解説・理解の為のリソースの開発を行うこととした。上記の目的を果たすための基礎研究として、学部レベルの教程、大学院レベルの教程の双方につき、文献調査及び関連研究者との意見交換を踏まえつつ教材の開発ないし素材の開発を行った。

研究成果の概要(英文)：This research project conducts basic research on modality and methodologies of mathematics education for economists that urges understanding that exploits geometrical intuition, economic intuition, as well as other kinds of intuitions. We reflected them to undergraduate teaching material and graduate teaching methodology development.

研究分野：経済理論

キーワード：経済理論 経済数学教育

## 1. 研究開始当初の背景

経済数学の直観的理解を促す事は学部教育、大学院教育の双方で重要であるが、経済数学の教科書の多くはその目的には必ずしも適切でない。経済数学の教科書には優れたものが既に多数存在するが、数学的手法を精緻に伝える事と、その大雑把なイメージを伝える事とのバランスにおいて、いずれも些か前者に傾斜し過ぎている嫌いがある。こうした事情を背景として本研究を企図した。

## 2. 研究の目的

上記の背景に鑑み、本研究計画は、経済学及び経営学の為の数学(以下、経済数学と称す。)教育におけるイメージを重視した直観的理解を促す為の教材ならびにカリキュラム開発を目的とする基礎研究を行うことを目的とし、幾何学的直観、経済学的直観、それ以外の直観につき、経済数学の入門段階からより高度な段階において組織的に直観的解説・理解の為のリソースの開発を行うこととした。

## 3. 研究の方法

上記の目的を果たすため、幾何学的直観、経済学的直観、それ以外の直観につき、経済数学の入門段階からより高度な段階において組織的に直観的解説・理解の為のリソースの開発を行うという方法論を計画した。

### (1) 【幾何学的直観に訴える方法論】

第1の幾何学的直観に訴える方法論とは、計量経済学で用いられる線形代数・行列代数の幾何学的理解や、ミクロ経済学で重要な役割を果たす包絡線定理の幾何学的意味や、同次関数についてのオイラーの定理の幾何学的意味等、数学的諸概念の幾何学的な意味を明らかにする事を通じて直観的な理解を促し、その適用範囲を広げていく方法論である。

### (2) 【経済学的直観に基づく方法論】

第2の経済学的直観に基づく方法論とは、ちょうど物理数学において数学的手法の意味が、その物理的意味を通じてより直観的に理解する事が可能であり得ると同様に、経済数学においても、数学的手法の経済学的な意味を通じてより直観的に理解しうる事を積極的に活用する方法論である。

### (3) 【それ以外の直観に基づく方法論】

第3のそれ以外の直観に基づく方法論とは、必ずしも幾何学的や経済学的には限定せず、何らかのイメージ、あるいはメタファー、アナロジーを用いてでも、特に高度に抽象的な概念について、「木を見て森を見ず」という事にならないように工夫する事を指向する方法論である。ある概念が、「要するに」

何のためのものかを直裁に問い、定義・公理を天下りの与えるだけではなく、何故そのような公理になっているのかを素朴に問いかけ、社会科学者の精神宜しく、簡単に納得してしまわない事が重要と考えた。

## 4. 研究成果

上記の目的を果たすための基礎研究として、学部レベルの教程、大学院レベルの教程の双方につき、文献調査及び関連研究者との意見交換を踏まえつつ教材の開発ないし素材の開発を行った。

### (1) 【学部レベルの教程について】

東北大学経済学部第2年次配当用4単科目(約30レクチャー)の経済経営数学の為の講義資料を新たに開発した。  
[平成23年度 東北大学経済学部 経済経営数学講義資料、秋田次郎]

東北学院大学経済学部の経済数学(約30レクチャー)を開発し、より多様な数学的準備と課題を持つ学生を対象として、実際の学生の反応を参考しつつ考察を進めた。  
[平成24年度、平成25年度 東北学院大学経済学部 経済数学講義資料、秋田次郎]

上記の講義資料開発において、同次関数についてのオイラーの定理の幾何学的意味や、包絡線定理の幾何学的意味等、数学的諸概念の幾何学的な意味に依拠した説明方法等を実際に導入し、それを用いた授業を通じてその有効性を確認した。

生産関数が一次同次関数であるとき、オイラーの定理によれば、投入数量ベクトルとそれらの限界生産力ベクトルの内積は産出数量に等しい。この事は、一次同次関数のグラフの形状から、任意の点での接平面が、当該点と原点を結ぶ半直線を含むことに注目すれば殆ど幾何学的直観から自明となる。この説明方法の教育的有効性を実践で試した。

包絡線定理は、最適化問題、例えば費用最小化問題における外生変数が変化することによる費用最小値の変化を考える際に、付随する内生変数の再調整の効果は無視しうることを主張する。これは内生変数については内点解であれば既に目的関数への限界の貢献はゼロであるのだが、この関係は目的関数を内生変数と外生変数の関数と考えて接平面を考えれば幾何学的に示すことができ、同時にこの定理が成立する為の前提や反例も直観的に示しうる。この説明方法の教育的有効性を実践で試した。

### (2) 【大学院レベルの教程について】

内外の文献調査を経て以下の内容の検討ないし考察を行った。

「行列のテンソル積の幾何学的な意味に関する考察」、

「非負行列に関するフロベニウスの定理の幾何学的意味に関する考察」、

「割引現在価値の概念を通じての完全微分・積分因子の直感的理解に関する考察」、

「積行列の転置行列と価格・数量双対性に関する考察」、

「行列の列空間と転置行列のゼロ空間の関係と価格・数量双対性に関する考察」

、 、 については2013年3月にmimeoに取り纏め、 については2014年3月に付け加えた。

、 、 については平成26年度に首都圏、関西の数理経済学研究者3名と意見交換し考察を深めmimeoの改訂に反映した。

[経済数学の直観的方法 秋田次郎 mimeo 2015年3月]以下その概略を取り纏める。

「行列のテンソル積の幾何学的な意味に関する考察」は、計量経済学に登場するクロネッカー積の幾何学的な意味合いに接近しようとする試みであり、ある行列 $V$ の列空間への射影と別の行列 $W$ の列空間への射影は、実は行列 $V$ と行列 $W$ のクロネッカー積とは実は、 $V$ の列空間への射影と別の行列 $W$ の列空間への正射影のクロネッカー積に他ならないという幾何学的な関係を先ず示した。

更に驚いたことに、この関係は正射影のみならず、行列 $V$ の列空間への斜交射影および別の行列 $W$ の列空間への(別の)斜交射影についても拡張可能であることが示される。

こうした関係を手がかりにクロネッカー積の幾何学的性質を考察した。

「非負行列に関するフロベニウスの定理の幾何学的意味に関する考察」は、投入産出モデル等の線形経済学で重要な役割を果たす正值行列の固有値に関するペロン・フロベニウスの定理を、 $2 \times 2$ ないし $3 \times 3$ 行列の場合について図示し、なぜ最大固有値に対応する固有ベクトルが正值であるべきかの幾何学的な直観を考察した。

「割引現在価値の概念を通じての完全微分・積分因子の直感的理解に関する考察」では、マクロ経済学において瞬間的予算制約式から通時的予算制約式を導出する際に登場する非定数係数線形常微分方程式の解法が、数学的にはいわゆる積分因子(integrating factor)の方法に対応するが、実はこの場合の積分因子が割引現在価値を求める為の割引因子に他ならないことを手がかりに、逆に積分因子の方法についての経済学的直観を検討した。

積分因子は完全微分(exact differential)

の条件から導かれるが、その直観的な意味は積分がスカラー場を構成するというを超えては直ちに明らかではない。

他方、割引因子の経済学的直観はもとより明確であり、またこれを用いて瞬間的予算制約式を積分し端点条件を用いて異時点間予算制約式を導きうることの経済的直観もまた明らかである。例え異なる時点の所得であっても、割引因子を用いて共通の基準時点に引き戻して考えれば比較可能・足し引き可能となるからである。

「積行列の転置行列と価格・数量双対性に関する考察」では、行列 $A$ と行列 $B$ の積行列 $AB$ の転置行列が行列 $B$ の転置行列と行列 $A$ の転置行列の積行列に等しい、つまり積をとる際に積の順序が逆転するという事実の直観的意味を検討した。

行列 $A$ 及び $B$ がいわゆる投入産出(インプット・アウトプット)行列すなわち産出数量ベクトルを、その生産の為に必要な投入数量ベクトルに変換する行列であると見なすと、それらの転置行列は、それぞれゼロ利潤条件下での投入価格ベクトルを産出価格ベクトルに変換する行列として解釈可能である。その際、数量については産出から投入への変換であったのが、価格については投入から産出への変換となり方向が逆転しており、積の順序逆転は経済学直観から理解しうることが示される。

「行列の列空間と転置行列のゼロ空間の関係と価格・数量双対性に関する考察」では、行列 $A$ の列空間と $A$ の転置行列のゼロ空間とが直交補完空間を構成するという線形代数の基本定理につき、幾何学的直観及びでも検討した転置行列の経済学的意味を用いて、経済学的直観を検討した。

行列 $A$ の転置行列 $B$ が投入産出行列だと解釈すると、行列 $B$ のゼロ空間の要素は、産出数量ベクトルを変化させないような投入数量変化ベクトルとなるが、他方、行列 $A$ の列空間の要素は投入価格ベクトルであり、両者の直交とは、投入総費用が不変に留まる事を意味する。ゼロ利潤ないし競争価格下では、投入総費用は産出総販売に等しく後者が不変であれば前者も不変なのは直観的に当然である。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計0件)

〔学会発表〕(計0件)

〔図書〕(計0件)

〔産業財産権〕

出願状況（計 0 件）

取得状況（計 0 件）

〔その他〕

(1) 平成 23 年度 東北大学経済学部 経済  
経営数学講義資料、秋田次郎

(2) 平成 24 年度、平成 25 年度 東北学院大  
学経済学部 経済数学講義資料、秋田次郎

(3) 経済数学の直観的方法 秋田次郎 mimeo  
2015 年 3 月

## 6 . 研究組織

(1)研究代表者

秋田 次郎 (AKITA, Jiro)

東北大学・大学院経済学研究科・教授

研究者番号：10302069