

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 17 日現在

機関番号：10101

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2011～2013

課題番号：23654002

研究課題名(和文)ファイバー構造を持つ小平次元0の極小モデルの構成

研究課題名(英文)On constructing of a minimal model of fibred algebraic varieties whose Kodaira dimension is zero

研究代表者

松下 大介 (MATSUSHITA, Daisuke)

北海道大学・理学(系)研究科(研究院)・准教授

研究者番号：90333591

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,700,000円、(間接経費) 510,000円

研究成果の概要(和文)：穴あき円盤の上の滑らかなアーベル多様体の族，あるいは底空間を高次元化した多重円盤から座標軸にあたる超平面を除いたものの上の滑らかなアーベル多様体の族を底空間の穴あるいは除いた超平面の上まで延長した族を構成することに成功した。この問題は1980年代には考察されていた問題ではあったが，満足出来る証明がこれまで与えられてこなかったため，関連する問題に不自然な技術的な仮定を付けざるをえないものが多くあり，この成果を利用することで，関連するいくつかの結果を改良することが見込まれる。

研究成果の概要(英文)：Let us consider a smooth abelian fibration over a punctured disk or an open set of polydisk which obtained by removing a hypersurface. It is natural question whether these families can be extended over a disk or a polydisk. On 80th, it was announced that we could obtain such a relative compactification with a incomplete proof. Since semidarkness of the proof, there are several results with technical assumptions. By this result, we may get rid of these assumptions and obtain idealistic results.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：極小モデル アーベル多様体

## 1. 研究開始当初の背景

代数多様体を双有理同値によって分類する極小モデル理論の予見する極小モデルの存在については、2005 年から大きな進展があり、小平次元が  $-\infty$  および次元と等しい場合 (一般型と呼ばれる) に対しては満足がいく結果が得られた。この小平次元がとりうる値は  $-\infty$  及び  $0$  以上の次元と等しい整数値までありうるが、残る場合についてはまったく手がつけられない状態であった。一方、残された問題を集約する試みについて進展も目覚ましく、小平次元  $0$  の場合に予想が解決されれば、残された問題はほとんどすべて解決出来ることもわかった。その結果、小平次元  $0$  の多様体についての極小モデル理論関連の予想が解決されることが望まれているが、2014 年現在でも小平次元  $0$  の多様体の極小モデルの存在については  $4$  次元以上では特殊な場合を除いては未解決であり、また有望な研究も出ていないため、ある意味、研究の行き詰まりのような状況が生じていた。

## 2. 研究の目的

上記のような背景に鑑み、技術的な条件の下であっても極小モデルの存在を示す、あるいは極小モデルの実例を構成することが出来れば、極小モデル予想の完全な解明に近づくと考え、代数多様体の中でも特にファイバー構造を持つ小平次元  $0$  の多様体の極小モデルの構成を目指した。ファイバー構造とは多様体  $X$  とそれから低次元の多様体への写像  $X \rightarrow S$  の組のことであり、 $X$  の双有理的な性質は  $S$  の性質と写像のファイバーの双有理的な性質によって説明出来るであろう、というのが極小モデル理論の一つの指針でもある。この場合  $S$  や写像のファイバーの次元は  $X$  の次元よりも真に小さくなるので、次元による帰納法が使えるのではないかと、という事情もこうし

た条件を課して考察した理由である。

## 3. 研究の方法

小平次元  $0$  の多様体の極小モデルがファイバー構造を持つならば、その一般ファイバーもやはり極小モデルとなり、その小平次元も  $0$  となる。小平次元が  $0$  の多様体で極小モデルとなっているものはアーベル多様体、Calabi-Yau 多様体およびシンプレクティック多様体があるが、このうち最も構造がよくわかっているものはアーベル多様体であり、アーベル多様体をファイバーとするファイバー構造を持つ多様体で小平次元  $0$  のものの極小モデルを構成することを試み、その結果を元にして Calabi-Yau およびシンプレクティック多様体をファイバーに持つものの構成に進むつもりであった。

## 4. 研究成果

複素多様体上の滑らかなアーベル多様体の族、もしくは具体的に穴あき円盤あるいは多重円盤から超平面を除いたもの上の滑らかな射影的なアーベル多様体の族を考える。アーベル多様体をファイバーに持つファイバー構造  $X \rightarrow S$  を持つ射影多様体からは  $S$  から余次元  $1$  の解析的閉部分多様体を除いた後に適切な開被覆を取れば、すべて上で述べたようなものと同型となる。そこで円盤あるいは多重円盤の上へ族の延長で、極小モデルとなっているようなものを構成出来れば、極小モデルの性質上、双有理写像で貼り合うことがわかり、これから極小モデルが構成出来る。この方向での極小モデルの構成の問題を以下の 2 つの場合に解決することが出来た。一つは Lagrangian fibration と呼ばれるシンプレクティック多様体からのアーベル多様体をファイバーに持つ族、もうひとつは底空間が一次元の場合である。このうち

前者については学会発表①において報告した。論文については現在準備中である。また後者については2014年6月20日に京都大学代数・幾何セミナーにおいて発表予定であり、論文については現在準備中である。また、この研究過程でラグランジアンファイブレーションの双有理的な性質の一つを発見し、発表論文①にまとめた。この論文では Beauville 予想、既約シンプレクティック多様体がラグランジアン部分多様体となっているアーベル多様体を含めば、その既約シンプレクティック多様体はラグランジアンファイブレーションをもつであろうという予想に完全な解決を与えた。先行した部分的な結果を学会発表⑧～⑨で行った。またこれらの学会発表で参加した学会での研究打ち合わせから、ラグランジアンファイブレーションの存在条件についての結果を得て、その成果を学会発表⑤、⑦にて行った。そのほか、これまでの研究の総合報告的な発表を⑥、⑧で行った。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 2 件)

① Daisuke MATSUSHITA, "On almost holomorphic Lagrangian fibrations", *Math. Ann.*, vol 357, (2014), 565-57, 査読有

② Daisuke MATSUSHITA and De-Qi Zhang, "Zariski decomposition and Lagrangian fibration on HyperKähler manifolds", *Math. Res. Lett.* Vol 5, (2013), 1-9, 査読有

[学会発表] (計 9 件)

① Daisuke MATSUSHITA, "On the dual fibration of a Lagrangian fibration", *Moduli spaces of irreducible symplectic*

*varieties, cubics and Enriques surfaces*, Laboratoire Paul Painlevé, フランス, 2014年3月28日, 招待講演.

② Daisuke MATSUSHITA, "On base manifolds of Lagrangian fibration of singular symplectic manifolds", *Symplectic Algebraic Geometry*, 関西セミナーハウス, 京都府, 2013年10月4日, 招待講演.

③ Daisuke MATSUSHITA, "A base space of Lagrangian fibrations of symplectic varieties", *Laboratory of algebraic geometry: weekly seminar*, Higher school of Economy, ロシア, 2013年3月6日, 招待講演.

④ Daisuke MATSUSHITA, "On birational semi-rigidity of Lagrangian fibration", *大阪大学代数幾何セミナー*, 大阪大学, 豊中市, 2012年12月17日, 招待講演.

⑤ Daisuke MATSUSHITA, "On isotropic divisors of the Hilbert scheme of  $K3$  surfaces", *Hyper Kähler Geometry*, Simons Center for Geometry and Physics, アメリカ, 2012年11月1日, 招待講演.

⑥ Daisuke MATSUSHITA, "On Lagrangian fibrations", *代数学シンポジウム*, 京都大学, 京都市, 2012年8月22日, 招待講演.

⑦ Daisuke MATSUSHITA, "On semi-ampleness of nef divisor on the Hilbert scheme of  $K3$  surfaces", *Geometry of Kähler manifolds*, Jean Leray Institute of Mathematics, フランス, 2012年5月24日, 招待講演.

⑧ Daisuke MATSUSHITA, "Birational

semi rigidity of Lagrangian fibrations”, Symposium on Projective Algebraic Varieties and Moduli, Novotel Busan Ambassador, 韓国, 2012 年 2 月 16 日, 招待講演.

⑨ Daisuke MATSUSHITA, ” On rational Lagrangian fibrations of irreducible symplectic Manifolds”, Moduli spaces and automorphic forms, Centre International de Recontre Mathematique, フランス, 2011 年 10 月 14 日. 招待講演

〔図書〕 (計 0 件)

〔産業財産権〕

○出願状況 (計 0 件)

名称:

発明者:

権利者:

種類:

番号:

出願年月日:

国内外の別:

○取得状況 (計 0 件)

名称:

発明者:

権利者:

種類:

番号:

取得年月日:

国内外の別:

〔その他〕

ホームページ等

## 6. 研究組織

(1) 研究代表者

松下 大介 ( MATSUSHITA Daisuke )  
北海道大学・大学院理学研究院・准教授

研究者番号: 999333591

(2) 研究分担者

なし

( )

研究者番号:

(3) 連携研究者

藤野 修 ( FUJINO Osamu ) 京都大学・大学院理学研究科・准教授

研究者番号: 60324711

川北 真之 ( KAWAKITA Masayuki )  
京都大学・数理解析研究所・准教授

研究者番号: 10378961

高木 寛道 ( TAKAGI Hiromichi )  
東京大学・大学院数理科学研究科・准教授

研究者番号: 30322150